计算科学与工程 学习笔记 A=LU

Linyu Zhu · 20 Apr 2024

linear algebra主要涉及4个主要问题：

1. LU分解，消元 $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ，matlab command: lu(A)
2. QR分解 $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$，主要用于最小二乘，矩形矩阵,matlab command: qr(A)
3. eigenvalue $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S^{-1}}$, matlab command: eig(A)
4. singular values decomposition, SVD. $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V^T}$, matlab command: svd(A)

首先来说LU 分解： 假设任意一个3x3矩阵$\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & g & h \end{bmatrix} \tag{1}$$

对于这样一个矩阵，做消元之前最好将其行顺序调整一下，提高消元的效率。按照Lec2的介绍，为了使0位的利用率最高（在消元的过程中不被fill in），应当使最左侧为0的行往前提。将单位矩阵$\mathbf{I}_{3x3}$的第i 行与第j行互换（也可以是列互换，对于单位矩阵来说都一样）(称该矩阵为$\mathbf{J}$)，那么$\mathbf{JA}$将调换矩阵$\mathbf{A}$的第i行与第j行。$\mathbf{AJ}$将调换矩阵$\mathbf{A}$的第i列与第j列。很容易可以证明矩阵$\mathbf{J}$的逆矩阵是它本身，因为调换两次等于没调换。

- 第一步，调整矩阵$\mathbf{A}$的行顺序：
- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & g & h \\ d & e & f \end{bmatrix} \tag{2}$$

  第二步消元：step0，以第0行的行首作为pivot，然后对下面每一行，例如第j行执行-A[j][0]/A[0][0]*第0行的操作。如此操作，矩阵$\mathbf{A}$将变成

  $$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e - d/a * b & f - d/a * c \\ 0 & g & h \end{bmatrix} \tag{3}$$

  将这一行消元产生的系数A[j][0]/A[0][0]作为元素填入到L矩阵第0列中，将被消元后的矩阵$\mathbf{A}'$的第0行填入U矩阵的第0行。L矩阵是下三角矩阵，对角元素是1，其余元素，例如第一列的L[j][0]=A[j][0]/A[0]

[0]。U矩阵是上三角矩阵，例如，step0以矩阵A的第一行第一个元素作为pivot，那么矩阵$\mathbf{A}'$的第0行将不受后面消元操作的影响，所以可以直接填入U矩阵第0行中。下面再以矩阵$\mathbf{A}'$[1][1]作为pivot，对下面的行进行消元，从而继续填充L矩阵和U矩阵。

note：如果矩阵$\mathbf{A}$是对称矩阵，LU分解之后会丧失symmetry，为了恢复symmetry，可以peel off diagonals from U：$\mathbf{U}=\mathbf{DL^T}$。所以当矩阵$\mathbf{A}$是对称矩阵，有$\mathbf{A}=\mathbf{LDL^T}$。

另外，一个对称矩阵的逆也是对称矩阵。