计算科学与工程 学习笔记 Au=b

Linyu Zhu · 20 Apr 2024

这里是MIT 18.085 computational science and engineering的学习笔记

LEC 3 介绍了解方程$\mathbf{A} \cdot \vec{u} = \vec{b}$中的unknowns$\vec{u}$的三种方法：

1. Matlab中的backlash
2. 针对sparse matrix, reorder rows, and do elimination. 变成对角阵或者三角阵之后，就变得简单了。
3. 针对大规模的对称矩阵，使用conjugate gradient方法，也称作multigrid（多重网格），incomplete LU。 不了解

下面重点讲Matlab中的backlash算力： 实际问题中，经常会遇到需要解$\mathbf{A} \cdot \vec{u} = \vec{b}$，$\mathbf{A} \cdot \vec{u} = \vec{c}$，甚至更多的情况，例如设计问题中，尝试给不同的设计参数后的系统响应如何？

- 如果使用消元法，意味着每一个方程都需要做一遍消元，效率太低了
- 如果使用$\vec{u} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \vec{b}$的方法，会有以下问题
    1. $\mathbf{A^{-1}}$不容易获得，例如当A的size是矩形的时候
    2. 可能A本身是稀疏矩阵或者对角阵，A的逆矩阵却是dense
    3. A的逆矩阵是dense的时候，$\mathbf{A^{-1}} \cdot \vec{b}$的乘法操作takes long
- Matlab的实现方式是： 将$\mathbf{A} \cdot \vec{u} = \vec{b}$右侧的$\vec{b}$看作是系统的输入/激励，未知量$\vec{u}$看作是系统的响应。由于A矩阵是constant，意味着系统是线性时不变的。假设我们可以获得每个独立impulse输入对应的响应，当输入是多个impulse的线性组合，那么$\vec{u}$也是每个独立impulse产生的响应的线性组合。 假设$\mathbf{A}$是一个3x3矩阵，对应有3个独立的impulses，分别是$\vec{b_1} = [1, 0, 0]^T$，$\vec{b_2} = [0, 1, 0]^T$，$\vec{b_3} = [0, 0, 1]^T$，它们对应的系统响应为$\vec{u_1}$、$\vec{u_2}$、$\vec{u_3}$. 由于$\vec{b_1}$，$\vec{b_2}$和$\vec{b_3}$组成的block matrix 是单位矩阵，那么$\vec{u_1}$、$\vec{u_2}$、$\vec{u_3}$组成的block matrix 应当是$\mathbf{A^{-1}}$. 如何获得$\mathbf{A^{-1}}$？对block matrix [A, I]做消元，当A矩阵消元变成I的时候，对应地，右侧由I变成$\mathbf{A^{-1}}$。