

计算科学与工程 学习笔记 $Au=b$

Linyu Zhu · 20 Apr 2024

这里是MIT 18.085 computational science and engineering的学习笔记

LEC 3 介绍了解方程 $A \cdot \vec{u} = \vec{b}$ 中的unknowns \vec{u} 的三种方法：

1. Matlab中的backlash
2. 针对sparse matrix, reorder rows, and do elimination. 变成对角阵或者三角阵之后，就变得简单了。
3. 针对大规模的对称矩阵，使用conjugate gradient方法，也称作multigrid（多重网格），incomplete LU。 不了解

下面重点讲Matlab中的backlash算力：实际问题中，经常会遇到需要解 $A \cdot \vec{u} = \vec{b}$ ， $A \cdot \vec{u} = \vec{c}$ ，甚至更多的情况，例如设计问题中，尝试给不同的设计参数后的系统响应如何？

- 如果使用消元法，意味着每一个方程都需要做一遍消元，效率太低了
- 如果使用 $\vec{u} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ 的方法，会有以下问题
 1. A^{-1} 不容易获得，例如当A的size是矩形的时候
 2. 可能A本身是稀疏矩阵或者对角阵，A的逆矩阵却是dense
 3. A的逆矩阵是dense的时候， $A^{-1} \cdot \vec{b}$ 的乘法操作takes long
- Matlab的实现方式是：将 $A \cdot \vec{u} = \vec{b}$ 右侧的 \vec{b} 看作是系统的输入/激励，未知量 \vec{u} 看作是系统的响应。由于A矩阵是constant，意味着系统是线性时不变的。假设我们可以获得每个独立impulse输入对应的响应，当输入是多个impulse的线性组合，那么 \vec{u} 也是每个独立impulse产生的响应的线性组合。假设A是一个3x3矩阵，对应有3个独立的impulses，分别是 $\vec{b}_1 = [1, 0, 0]^T$ ， $\vec{b}_2 = [0, 1, 0]^T$ ， $\vec{b}_3 = [0, 0, 1]^T$ ，它们对应的系统响应为 \vec{u}_1 、 \vec{u}_2 、 \vec{u}_3 。由于 \vec{b}_1 ， \vec{b}_2 和 \vec{b}_3 组成的block matrix 是单位矩阵，那么 \vec{u}_1 、 \vec{u}_2 、 \vec{u}_3 组成的block matrix 应当是 A^{-1} 。如何获得 A^{-1} ？对block matrix [A, I] 做消元，当A矩阵消元变成I的时候，对应地，右侧由I变成 A^{-1} 。