Algunos comentarios...

amsrojas • 21 Feb 2024

En lo que sigue supondremos que $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Es bien conocido que para $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ la composición $h = f(g)$ esta bien definida y

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial r} & \dfrac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}$$

De acuerdo con esto ∇f se puede escribir en coordenadas polares $\nabla_{r,\theta} f$ como

$$\nabla_{r,\theta} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

en donde $\hat{\boldsymbol{r}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin\theta, \cos\theta)$