first

Eric Ley • 15 Feb 2024

Ley的复分析笔记-0

本节介绍最大模原理(**MMP**)和它的一些应用. ## 1. 最大模原理 这一段将给出最大模定理的不同版本及其推广. ### 1.1. Return to basis. > 定理**1** (1st-Version) 设 G 是一个连通区域， $f\in H(G)$ ，若 $|f|$ 在 $a\in G$ 取最大值, 则 f 是常函数.

证明**:** 我们可以用解析函数的均值定理(Cauchy积分公式的推论) $$ f(a)=\frac1{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\mathrm d\theta $$ 看出, 在 a 点的某个邻域内 $$|f(z)|=|f(a)|$$ 由C-R方程 (或直接由Mobius变换的性质) 可得到 f 在 a 的某个邻域取常值. 又根据解析函数零点的特点, f 必定在连通区域 G 内取常值.

另一方面，从开映射定理的角度来看，由于在 f 不是常函数时， $|\cdot|$ 和 f 都是开映射(注意要求 G 是连通的!), $|f|(G)$ 是 $[0,\infty)$ 上的开集，自然不可能有最大值.

$\blacksquare$

注意上面的定理需要 G 的连通性. 没有这个条件，我们常常会需要在各个连通分支上运用定理1. 如果考虑的是在 G 的闭包上连续的函数，定理1的另一个表述为:

> 定理**2:** (2nd-Version) 设 G 是一个有界开集， $f\in H(G)\cap C(\bar G)$, 则 f 一定可以在边界取最大模，即 $$ \max_{\bar G}|f|=\max_{\partial G}|f|$$

证明: 注意到 $\bar G$ 是紧集， $|f|$ 可取到最大值，设在 a 取到. 如果 $a\in\partial G$, Done. 如果 $a\in G$, 那么 f 在 a 所在的连通分支 H 上是常数，从而在 ∂H 上也取到最大值.

$\blacksquare$

在 G 连通时，有 $$\forall z\in G,|f(z)|\leq \max_{\partial G}|f|$$ 且如果取等，那么 f 是常函数.

注意如果没有连通性，即使f不是常函数，也完全可以在G内部取到极值.

1.2. 一些推广

现在我们考虑，能否丢掉有界这个条件，使得$|f|$仍然可以在边界取最大值呢? 自然是不能的，毕竟，当$\bar G$无界时，我们还不能确定最大值的存在性. 但是，我们可以把$\max$ 改成 $\sup$, 在推广的实数系$\overline{\mathbb R}$上取值，从而得到$$\sup_{\bar G}|f|=\sup_{\partial G}|f|$$ 吗? 答案是否定的. 考虑 $$f(z)=\exp\{\exp z\}, G=\mathbb R\times(-\pi/2,\pi/2)$$ $|f|$在边界上取1， 但在实轴上的值可以接近$+\infty$. 问题的其中一个关键在于，拓扑中的最值原理: >引理**1**: X是紧的拓扑空间， Y是带序拓扑的空间， $f:X\to Y$是连续函数，则一定可以取到最值.

要求定义域的紧性，而$\mathbb C$ 不是紧的，我们考虑其one-point compactness: $\mathbb C_{\infty}$. 这时， $|f|$的最值自然可以在$\overline{G}_{\infty}$上取到. 于是，和定理2相似的结论便是 >定理2*: 设$G\subset\mathbb C{}$ 是开集, $f\in H(G)\cap C(\bar G)$且 $\lim_{z\to \infty} |f|$存在, 则$$\max_{\bar G_{\infty}}|f|=\max_{\partial_{\infty}G}|f|$$

证明**:** $|f|$在 $\bar G_{\infty}$上连续，那么一定可以取到最值. 重复定理2的证明即可.

$\blacksquare$

为了便于叙述，我们先引入半连续性的概念: >定义： 设X是一个拓扑空间，称$f:X\to\overline{\mathbb R}$上半连续的是指: $\forall c\in\mathbb R$, $\{f<c\}$ 是闭集.

在X是第一可数空间(在一般空间中需要用net来定义)时，它等价于 >$$\forall x_0\in X,\limsup_{x\to x_0} f(x)\leq f(x_0)$$

对于半连续函数，我们有最值原理: >引理**2**: 若X是紧空间，则X上的上半连续函数有最大值, 且最值点也是紧的.

证明**:** 考虑$A=f(X)$, $F_c=\{f\geq c\}$是闭的，而且${F_c:c\in A}$ 满足f.i.p(有限交不空), 从而 $\bigcap_{c\in A} F_c$ 是非空紧集, 且其恰为最大值点集.

$\blacksquare$

现在回到最大模原理，考虑更一般的情况：f 可能做不到在边界上连续, 这时 f 模的最值情况如何呢? 一个自然的想法是考虑函数 $$\limsup|f|：\overline{G}_{\infty}\to \overline{\mathbb R}, z\mapsto\limsup_{w\to z}|f(w)|$$ 这个函数是半连续的, 也满足最值定理. 而且 $$\limsup|f|\big|_G=|f|$$ 有了这些，便可以给出 >定理 **3**(3rd-Version)：$G\subset \mathbb C$ 是开集, 则 $\limsup|f|$ 一定在边界 $\partial_{\infty} G$ 上取得到最值, 从而 $$\forall z\in G, f(z)\leq \sup_{z\in\partial_{\infty}G}(\limsup |f|)(z)$$

证明： 设 $\limsup |f|$ 在 a 取最大值. 那么 $a\in \partial_{\infty}G$, Done.

若 $a\in G$, 那么可以知道 f 在该连通分支取常数，从而也在边界 ∂G 上取得到最值. 但是 $\partial G\subset\partial_{\infty} G$, Done.

$\blacksquare$

定理3实际上蕴含了定理2*.

回顾定理2和定理3，,在 f 或 $\limsup f$ 在边界上无界的时候，实际上是没有意义的. 我们所做的工作，本质是通过用函数在边界的模控制函数在 G 内的模.

1.3. Phragmen-Lindelof 定理

在这一段最后，我们介绍这个114年前由 E.Lindelof 和 E.Phragmen 给出的结果. 我们延续之前的做法，控制函数在边界上的行为，但这次仅仅对 $|f|$ 的”增长” 进行限制，而不是要求他们有界，同样可以得到 f 有界的结果. 当然，这还需要对 G 的拓扑性质有一些限制:

> 设 G 是一个连通开集，且满足: $\forall z\in \partial_{\infty} G, \exists B_{\infty}(z;\rho)\cap G$ 是单连通区域.

例如，任何单连通区域， $\mathbb C$ 中的圆环都满足上述条件.

> 定理**4(Phragmen-Lindelof)**： $f\in H(G), \phi:G\to\mathbb C\in H(G)$ 没有零点且有界. $\partial_{\infty}=A\cup B$ 有以下两种点组成:
> (1) $a\in A: (\limsup |f|)(a)\leq M$;

> (2) $b \in B: \forall \eta>0, (\limsup |f|| \phi |^{ \eta })
> (b) \leq M $.
> 则 $\forall z\in G, f(z)\leq M$.

证明： 不妨设 ${|\phi|}\leq L$ 且 $L>1$. 先考虑 G 是单连通区域的情形. 这时 G 上存在 $\log \phi$ 的解析分支，从而也有 $ \phi^\eta$ 的解析分支($\exp\{\eta\log\phi\}$). 考虑 $ $F=f\left(\frac{\phi}{L}\right)^{\eta}$$ 则 F 满足 $$ \sup_{z\in\partial_{\infty}G}(\limsup |F|)(z)\leq \max\ {M,ML^{-\eta}\}=M$$ 这时由定理3知， $\forall z\in G, |f(z)| \leq (L/\phi)^{\eta}M$. 由于 η 是任取的, $\forall z\in G, |f(z)|\leq M$. 对于一般的区域，我们只需要在覆盖边界的每个单连通区域 $V(z)$ 内进行上面的操作, 则在每个 $V(z)$ 内 $$|f|\leq {\sup_{\partial_{\infty} V(z)} f}\leq\max\{L,\sup_{\partial V(z)\cap \bar G} \limsup|f|\} $$ 但 $\partial V(z)\cap \bar G$ 是紧集，所以 $\limsup |f|$ 在 $\partial G\cap \partial V(z)$ 取最值. 即在 $V(z)$ 中： $$|f| \leq L$$ 令 $$H=G-\bigcup_{z\in\partial_{\infty} G} V(z)$$ 则 H 是 G 中的紧集. $|f|$ 在 H 上的最值在 ∂H 取到, 但 $\partial H\subset\bigcup_z\partial V(z)$. 综上知 $|f|\leq L$ in G .

$\blacksquare$

利用定理4，我们给出一个第三段用到的推论: >推论**1**： 设 G 是一个单连通区域, $f\in H(G)\cap C(\bar G)$, 且 $\sup_{G}|f| =L<\infty$. 则 $$ \forall z\in G,|f(z)|\leq\sup_{\partial G}| f|$$

证明**:** 只需考虑 G 无界的情况. 设 $\sup_{\partial G}|f|=M\leq L<\infty$. 考虑函数 $g=f/M$,则 $|g|\leq 1$ on ∂G . 令 $$\phi=\frac{1}{2L/M+g}$$ 则 ϕ 在 G 上有界且没有零点. $$ \limsup_{z\to\infty} |g||\phi|^{\eta}\leq 1$$ 由 $ \partial_{\infty} G=\partial G\cup{\infty}$, 它们分别对应定理4中的 A,B . 所以 $|g|\leq 1$ on G ,即 $|f|\leq M$ on G .

$\blacksquare$

推论1对一般的区域 G 也是成立的(见本节附录).

2. Schwartz 引理

2.1. Schwatz

最大模定理一个重要的推论是: >定理**5(Schwartz)**： $f:\mathbb D\to \overline{\mathbb D}\in H(\mathbb D)$, $f(0)=0$, 则 $f'(0)\leq 1, |f(z)|\leq |z|$， 且任何一个等号成立，则存在实数 θ, $f(z)=e^{i\theta}z$.

证明**:** 对函数 $f(z)/z$ 用最大模定理.

$\blacksquare$

2.2. 一类Mobius变换

Schwartz定理一个直接的应用是，从 $\mathbb D$ 的到自身的共形映射由在0处的值唯一确定了. 为了说明这件事，我们先来回顾一类特殊的Mobius变换. 设 $a\in\mathbb D$: $$\phi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar az}$$ 在 $\overline{\mathbb D}$ 内它是良定义的, 注意它的边界值 $$|\phi_a(e^{i\theta})|=\frac{|e^{i\theta}-a|}{|1-\bar ae^{i\theta}|}=1$$

再次运用一下极大模原理便知， $\phi_a:\mathbb D\to\mathbb D$, 且把边界映到边界. 并注意 $$\phi_a\circ\phi_{-a}=1=\phi_{-a}\circ\phi_a$$ 这个映射还是双射. 通过直接计算: $$\begin{align*} &\phi_a(0)=-a; \phi_a(a)=0; \\&\phi_a'{0}=1-|a|^2; \phi_a'(a)=(1-|a|^2)^{-1} \tag{2.3.1}\end{align*}$$

2.3. 单位圆盘上的共形映射.

现在我们考虑函数 $$f:\mathbb D\to\mathbb D, f(a)=\alpha$$ 令 $$g=\phi_{\alpha}\circ f\circ\phi_{-a}$$ 则 $g(0)=0$. 由Schwatz引理， $$\begin{align*}|g'(0)|=&|\phi_{\alpha}'(\alpha)f'(a)\phi_{-a}'(0)|\\=&\frac{1-|a|^2}{1-|\alpha|^2}|f(a)'|\\ \leq& 1\end{align*}$$ 即 $$|f'(a)|\leq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|a|^2}\tag{2.3.1}$$ 且如果上式取等， $$f=\phi_{-\alpha}\circ (e^{i\theta}\phi_{a}) \tag{2.3.2}$$ 现在可以看到，如果 f 是双射，那么由反函数求导的定理(这时 f^{-1} 一定解析): $$(f^{-1})'(a)=\frac1{f'(a)}\leq \frac{1-|a|^2}{1-|\alpha|^2}\tag{2.3.3}$$ 于是(2.3.2)一定成立. 特别的, $\alpha=0$ 时:

> 定理**5**： 若$f:\mathbb D\to\mathbb D$, $f(a)=0$, 当且仅当$f=e^{i\theta}\phi_{a}$.

3. 对数凸函数

3.1 对数凸(Logarithmically convex)

顾名思义， f对数凸是指$\log f$凸. >定理**6**： 设$G=(a,b)\times \mathbb R$, $f\in C(\bar G)\cap H(G)$不是常函数. $|f|<L$ in G. 令$$M:[a,b]\to \mathbb R,x\mapsto \sup_{ y\in\mathbb R}|f(x+iy)|$$则M是对数凸函数.

证明**:** 注意由于f不消失， $M>0$. 往证对任意$x\in(a,b)$ $$M(x)^{b-a}\leq M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}$$ 考虑$\bar G$上的辅助函数 $$g(z)=M(a)^{\frac{b-z}{b-a}}M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}$$ 则 $$|g(x+iy)|=M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}$$ 这说明$1/g$有界. 注意到在∂G上: $$|g(a+iy)|=M(a), |g(b+iy)|=M(b)$$ 由于G是单连通的， f/g是有界的解析函数，在边界上$|f/g|\leq 1$. 利用推论1得: $$\left|\frac fg\right|\leq 1$$ 即 $$M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}=|\sup_{y}g(x+iy)|\geq \sup_y|f(x+iy)|=M(x)$$
.

$\blacksquare$

3.2 Hadamard’s Three Circles Theorem

> 定理**7**： $f\in H(\{0<R_1<|z|<R_2\})$ 不恒为0. 令$$M:(R_1,R_2)\to \mathbb R; r\mapsto \max_{[0,2\pi)}|f(re^{i\theta})|$$则$\log M(r)$ 是关于$\log r$的凸函数.

换句话讲,对$r\in[r_1,r_2]\in(R_1,R_2)$， 成立 $$\log M(r)\leq\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-log r_1}\log M(r_2)$$ >证明： 考虑函数 $$g=f\circ e^z; G=[\log r_1,\log r_2]\times \mathbb R$$ 由于f在紧集$\{r_1\leq |z|\leq r_2\}$上必然有界， $|g|$也是有界的，且满足定理6的条件, 所以$g(e^x)$是对数凸函数. 将$r=|e^z|=e^x, x=\log r$带入即可.

$\blacksquare$

4. 附录

4.1. 推论1的另一证明

推论1可不限制G. 我们给出另一种证明:

证明： 设$M=\sup_{\partial G}|f|<\infty$. 固定$a\in G$, 考虑函数 $$g(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a},g(a)={f'(a)}{}$$ 则$g\in H(G)$且$\lim_{z\to \infty} g=0$, 从而存在B s.t. $|g|\leq B$考虑$h=\left(\frac{f}{M}\right)^Ng$, 则$\lim_{z\to\infty} h(z)= 0$. 定理2*说明在$G$内 $|h|\leq B$. 即对$g(z)\neq 0$: $$|f(z)|\leq M\left|\frac{B}{g(z)}\right|^{1/N}$$
但是N是任取的，所以 $$|f(z)|\leq M$$ 由于g的零点是孤立的，由连续性得$|f|\leq M$ in G.

$\blacksquare$

4.2. 推广的 Louville 定理

> 定理**8:** 若f是整函数， $|f|\leq 1+\sqrt{|z|}$, 则f是常数. 证明**:** 由Cauchy估计: $$|f^{(n)}|\leq \frac{n!M(R)}{R^n}\Rightarrow |f'|\leq \frac{1+\sqrt{|R|}}{R}\Rightarrow |f'|=0$$.
>
> $\blacksquare$
>
> 定理8和Louville定理的关系类似于Phragmen-Lindelof定理和最大模原理的关系.

顺便的，运用MMP，我们还可以得到: >定理**9**： f是整函数，且不是常数，那么存在趋于∞的曲线$$\gamma:[0,\infty)\to \mathbb C,\lim_{\infty}|\gamma(t)|=\infty$$使得$\lim_{\infty} f(\gamma(t))=\infty$

思路是寻找点列$z_n\to\infty$, 使得$f(z_n)\to\infty$, 用线段连接z_n, 并用MMP控制中间线段上的模.

证明**:** 考虑开集$T_1=\{|f|>1\}, T_n=H_{n-1}\cap\{|f|>n\}$, H_n是T_n的一个连通分支. 则容易用MMP证明:
a. $|f|=1$ on ∂H .
b. f在H_n 上无界 .

由此我们得到一族非空开集套$\{H_n\}$, 从而在每个H_n中选取点列z_n, 用$\gamma_n\in H_{n}$连接z_{n-1}和z_n, $\gamma=\sum_n\gamma$即为所求.

$\blacksquare$

4.3. Lindelof定理的其他推广

> 定理**10**： 把定理4中的$\phi,A\cup B$, 改为$\phi_n, A\cup B_n$. 仍成立$|f|\leq M$.

4.4. 最大模原理的逆定理

> 定理**11(Rado)**： 设向量空间$\mathcal F\subset C(\bar{\mathbb D},\mathbb C)$满足
> (1)$1\subset V$,
> (2) $f\in V\Rightarrow zf\in V$,
> (3)$\sup_{\mathbb D}|f|=\sup_{\partial \mathbb D}|f|$.
> 则$V\subset H(\mathbb D)$.

证明**:** 所有的多项式都在V中. $$\partial\bar{\partial}(zf)=\partial(z\bar{\partial} f)=\bar{\partial}f+\partial\bar{\partial} f=0$$ 但f和zf都是调和函数，所以$\bar{\partial}f=0$.

$\blacksquare$

这个定理告诉我们，最大模原理可以用来刻画解析函数.