Demostración de pi por método de Newton

Joshua Arrazola • 6 Feb 2024

¿Qué es esto?

Desde hace tiempo quería tener un espacio en internet en el que pudiese digitalizar mis apuntes, y quizá compartirlos con personas que les pueda interesar. Ciertamente llevó con esta idea un tiempo, mi primer artículo(sí es que así se le puede llamar) escrito es de hace casi dos años, de julio del 2022, y aunque en ese tiempo tenía la intención, no contaba con las herramientas necesarias para ello.

Intenté iniciar este blog en **Blogger**, que bien sirve como una plataforma para compartir tu *daily living*, pero difícilmente es una plataforma que le sirva a alguien que quiera publicar algo relacionado con las matemáticas. Por otro lado **WordPress** es otra alternativa útil, inclusive el matemático *Terence Tao* la utiliza para compartir sus avances e investigaciones, pero tampoco me terminaba de agradar, el compilado de *LaTeX* sólo se puede hacer por medio de web scripts que al renderizarse parecen imágenes en mala resolución. Finalmente, encontré esta herramienta llamada **functor_network**, que promete ser una plataforma dirigida a personas que deseen compartir contenido de ciencia o matemáticas, y que me sirve bastante puesto que soporta tanto *markdown* como *LaTeX*.

De cualquier manera, en este espacio me gustaría compartir cosas que leo en el día a día, y temas que me parecen interesantes; mi principal área de estudio son las matemáticas, la física y la computación, más no descarto que en un futuro me atreva a hablar acerca de otros temas.

Para iniciar con este blog, me gustaría hacerlo con una demostración, la demostración del número π dada por Isaac Newton en el siglo XVII.

Definición.

π se define como el cociente entre la **circunferencia** y el **diámetro** de un círculo; si tomas el diámetro y lo extiendes sobre el borde de un círculo, te vas a dar cuenta que esté cabe tres veces y un poquito más. Este poquito más representa la parte decimal de π:

$$\pi = \frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}} \approx 3.141592...$$

Historia.

La geometría plana era bien conocida desde antes de que el mismo Euclides escribiera *"Los elementos"*, la humanidad no tardó en deducir de forma más o menos intuitiva la manera de calcular el área de figuras geométricas.

Entre ellas el **cuadrado** ($l \times l$), **rectángulo** ($b \times h$), **triángulo** ($\frac{b \times h}{2}$), etc. Sin embargo, había una figura geométrica muy especial, el círculo, cuya fórmula área si bien es cierto era conocida, requería de una constante para ser calculada, a la que no se le llamaba π explícitamente, pero si se referían a ella como una cantidad desconocida y necesaria para el cálculo de la misma.

> Como dato, no sería hasta el siglo XVI que *William Oughtred* bautizaría la constante del círculo formalmente como π, en realidad lo pensó así debido a que la letra π es la inicial de la palabra griega περιφέρεια, que significa 'periferia'. Más tarde, **Leonhard Euler** fue el que se encargó realmente de popularizar la notación, haciendo uso de ella en sus trabajos.

A lo largo de la historia hubo múltiples aproximaciones para calcular π, los babilonios hace más de 2500 años ya tenían una aproximación del número con una precisión de dos decimales. Más tarde, el matemático y físico griego Arquímedes lo calcularía aún con mejor precisión, utilizando un método denominado *exhaución*, el cual consistía en calcular el área de círculos utilizando polígonos inscritos y circunscritos de un número de lados cada vez mayor.

Este método fue el predominante hasta el siglo XVII, y se basaba en la idea de cuantos más lados tiene un polígono, más tiende a parecerse a una circunferencia. Imagina un cuadrado, difícilmente podrías encontrarle similitud a un círculo, pero ahora imagina un pentágono, o un dodecágono (12 lados), o un isodecágono (20 lados). A mayor cantidad de lados, más se parece a un círculo, siguiendo este enfoque, se llegaron a trazar polígonos de hasta 20,000 lados, una tarea a la que matemáticos tuvieron que llegar a invertirle toda su vida, pero consiguiendo resultados bastante precisos.

Cálculo de Pi por Newton.

Durante el siglo XVII Newton estaba desarrollando el cálculo, o lo que el llamaba la *teoría de las fluxiones*. En ella, planteaba que la derivación y la integración eran operaciones inversas, de manera que ponía sobre la mesa los principios de lo que más tarde seria el *cálculo infinitesimal*.

Con unas matemáticas recien descubiertas(¿o inventadas?), mucho más poderosas que las que cualquier otro matemático antes que él hubiese tenido a su disposición, se dio a la tarea de calcular, de forma analítica, el valor de la constante π, dando así con uno de los primeros resultados que demostraban las enormes capacidades que tenía el cálculo y, para mí, dando lugar a mi demostración favorita en las matemáticas.

Geometría del círculo

La *geometría análitica* tenía sus buenos avances por aquel entonces, los suficientes como para que fuera ampliamente conocida la ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 0)$, la cual tiene la forma $x^2 + y^2 = r^2$, donde r representa el radio del círculo.

Siguiendo esta línea, encontró que podía expresar la ecuación de una circunferencia **unitaria** (de $r = 1$) en forma de una función, donde despejando tenemos:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Que también puede ser reescrita como:

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hasta aquí nada especial, tenemos una función que expresa esencialmente lo mismo que la ecuación de la circunferencia, simplemente por propiedades de funciones la ecuación es la **circunferencia entera**, la función es **media circunferencia**, pero en esencia expresan lo mismo. Sin embargo, la genialidad de Newton yace en que el sabía que si lograba **integrar** dicha función, podría calcular el área exacta bajo la curva que forma la circunferencia con el eje x.

Esa área que intentaba calcular implicaba a su vez calcular el número π, puesto que:

$$a = \pi \times r^2$$

Pero $r = 1$ $\therefore$

$$a = \pi$$

La problemática radicaba en que, en aquel cálculo integral tan joven, aún no se contaba con una técnica de integración apropiada para lograr resolver dicha integral; hoy en día un estudiante de cálculo podría aplicar *sustitución trigonométrica* para encontrar el resultado de la antiderivada (ya lo comprobé), pero para Newton no era una opción disponible.

Teorema del binomio

El teorema del binomio es un resultado fundamental en álgebra que te proporciona una fórmula para expandir una potencia de un binomio y obtener el n-ésimo término que requieras sin tener que recurrir a otras alternativas como distributiva o triángulo de Pascal.

La fórmula es la siguiente:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Donde realmente la fórmula no es tan complicada como parece, simplemente establece que mientras el grado de uno de los términos crece(k), el otro decrece $(n-k)$, hasta que eventualmente, en cada uno de los extremos, uno de los términos del binomio estará elevado a la 0. El coeficiente de cada termino esta dado por el cálculo del **coeficiente binomial**, que se define de la siguiente manera:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Aplicando por ejemplo el teorema del binomio para el desarrollo de $(x+y)^3$ tenemos:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

Nótese que el teorema del binomio sólo esta definido para cuando $n \in \mathbb{Z}^+$, puesto que es indispensable que lleguemos al caso donde $k = n_0$, que resta a $n_0 - k = n_0 - n_0 = 0$ y por tanto habremos llegado al final del desarrollo del binomio. Sobra decir supongo que el teorema está definido para $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, véase que la forma $(x+y)^n$ recuerda un poco al $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ que obtuvimos del despeje de la ecuación de un *círculo unitario* en el origen. Lo distinto está en que $n = \frac{1}{2}$, de tal suerte que, si intentamos aplicar el teorema del binomio, nunca llegaremos al caso en el que $n - k = 0$ puesto que $n \in \mathbb{R}$ y, por otro lado, $k \in \mathbb{Z}^+$.

El desarrollo de un binomio de la forma $(1+x)^n$ varia un poco, puesto que ahora tenemos una variable que suma a una constante, donde desarrollando:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k}{k!}$$

Ahora, si aún no se entiende muy bien el por qué estamos aplicando este teorema, recordemos que Newton no tenía una forma de integrar la función $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ directamente, sin embargo, el teorema del binomio transforma un binomio elevado a una potencia n a un polinomio común, función que Newton sí que sabía como integrar. De ahí el interés de transformar la función.

Ignorando la definición del teorema, Newton realizó el desarrolló de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, donde obtuvó lo siguiente:

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}(x^2)^2 \\ + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!}(x^2)^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2} - 3)}{4!}(x^2)^4 \\ + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2} - 3)(\frac{1}{2} - 4)}{5!}(x^2)^5 + \cdots\end{aligned}$$

Nótese que como había advertido anteriormente, nunca se llega al caso de $n - n$, de tal manera que se produce una **serie infinita**. Sin embargo, se consigue el objetivo de aplicar el teorema, la función resultante no tiene radical y, por su parte, está expresada como un polinomio. En realidad en mi cuaderno desarrollé hasta el término de orden 18, aquí solamente transcribiré hasta el término de orden 14 por simplificación de cálculos:

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} - \frac{33}{2048}x^{14} + \cdots$$

Una vez obtenida la función polinómica, ahora si podía integrarla de forma sencilla; para determinar los límites de integración, conviene pensar en el intervalo $[0, 1]$, puesto que gracias al 0 en el límite inferior de la integral podemos ahorrarnos bastante cálculo innecesario, por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$\pi = \int_0^1 (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} - \frac{33}{2048}x^{14})dx$$

Sin embargo, al integrar solamente desde $[0, 1]$ en realidad estamos ubicados en el primer cuadrante del plano, de tal forma que sólo estamos calculando una cuarta parte de pi, de manera que:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} - \frac{33}{2048}x^{14})dx$$

$$\therefore \pi = 4\int_0^1 (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} - \frac{33}{2048}x^{14})dx$$

Donde trabajando la integral obtenemos:

$$\pi = 4\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} - \frac{7x^{11}}{2816} - \frac{21x^{13}}{13312} - \frac{33x^{15}}{30720}\right)\Bigg|_0^1$$

Ahora sólo queda sustituir en los límites de integración, advierto nuevamente que el límite inferior es 0 y, por tanto, no es necesario evaluarlo:

$$\begin{aligned}\pi &= 4\left[\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} - \frac{21}{13312} - \frac{33}{30720}\right) - (0)\right] \\ &= 4\,(0.7899269459)\end{aligned}$$

$$\therefore \pi \approx 3.159707784$$

Veáse que el valor real aproximado de π es de $3.141592\ldots$ y acá obtuvimos $3.15\ldots$; el margen de diferencia se debe a la cantidad de términos que nosotros calculamos de la **serie infinita**, puesto que tomando un par de términos más, podríamos obtener resultados mucho más precisos; realmente la precisión de nuestra aproximación depende solamente de que tanto queremos expandir nuestra serie.

Hoy en día las computadoras son capaces de hacer cálculos como el que acabo de hacer de una forma *rápida* y *precisa*, de manera que con ayuda de **software** podemos llegar a aproximaciones de miles de decimales.

De cualquier forma, creo que con lo que acabo de explicar queda más que en evidencia la genialidad de Newton, su extraordinaria capacidad de análisis, y creo que puedo sustentar el *por qué* es mi científico favorito de toda la historia.

Con esto doy por terminada la demostración y también el primer artículo que comparto, y voy a intentar traer más cosas igual de interesantes. Gracias por leer.
$-\mathbb{J}$