

# Da relação entre dimensão e base

Domínio Genérico • 10 Nov 2023

Ainda na onda de [descrever conceitos de Álgebra Linear de um jeito mais natural](#), quer dizer, sem base, trago uma questão muito séria aqui: por que definir dimensão como a cardinalidade das bases? Que coisa terrível estabelecer algo tão natural como dimensão sobre algo tão arbitrário como base! Aqui proponho duas alternativas. A primeira me foi sugerida por um amigo quando discutíamos esse assunto, mas eu prefiro a segunda, que não lembro de ter encontrado em lugar nenhum. As duas definições propostas são, obviamente, equivalentes à definição padrão e, portanto, as três se sustentam sobre os mesmos fatos, que também serão aqui demonstrados.

O principal ingrediente pra definir apropriadamente dimensão de um espaço vetorial é enxergar conjuntos linearmente independentes como conjuntos de direções independentes. Informalmente, queremos que a dimensão de um espaço vetorial expresse o número máximo de direções independentes no espaço.

Seja  $V$  um  $k$ -espaço vetorial, sem qualquer restrição. Pra quem acredita no Axioma da Escolha, mais especificamente na sua manifestação como Lema de Zorn (espero que todo mundo),  $V$  possui uma base, ou seja, existe um cardinal  $\lambda$  e um conjunto l.i.  $\{v_i : i \in \lambda\} \subset V$  que gera  $V$ . Então existe um isomorfismo  $V \rightarrow \bigoplus_{i \in \lambda} k : v_i \mapsto e_i$ , onde  $\{e_i : i \in \lambda\}$  é a base canônica de  $\bigoplus_{i \in \lambda} k$ .

Invoquei o Lema de Zorn pra dar conta de espaços vetoriais quaisquer. No caso em que  $V$  é finitamente gerado, não há necessidade de ir tão longe: dado um conjunto gerador finito l.d., é possível eliminar elementos de forma apropriada até obter um conjunto gerador l.i. – em outras palavras, uma base. Feito isso, temos um isomorfismo  $V \simeq k^n$  pra algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Pronto, agora podemos deixar base pra lá, só precisávamos mostrar que pra todo  $V$  existe um cardinal  $\lambda$  tal que  $V \simeq \bigoplus_{i \in \lambda} k$ .

**Definição 1** A dimensão de  $V$  é o cardinal  $\dim V$  tal que  $V \simeq \bigoplus_{i \in \dim V} k$ .

Essa definição deixa mais ou menos clara a relação entre dimensão e o número de direções independentes ao expressar o espaço vetorial como uma soma direta de cópias do corpo, que nada mais é do que uma colagem de direções independentes. É óbvio que, nessa definição, dimensão coincide com a cardinalidade de uma base de  $V$ . Provaremos em breve que todas as bases tem mesma cardinalidade.

A segunda – e, na minha opinião, melhor – alternativa é mais direta:

**Definição 2** A dimensão de  $V$  é o cardinal

$$\dim V = \max\{|L| : L \subset V \text{ é l.i.}\} .$$

Pra mostrar que a definição acima funciona, vamos provar que qualquer conjunto gerador  $G \subset V$  satisfaz  $|G| \geq |L|$  para qualquer conjunto l.i.  $L \subset V$ . Novamente, se  $V$  é finitamente gerado, a coisa é um tanto simples e decorre de um resultado conhecido como Princípio de Substituição de Steinitz.

**Teorema 3 (Princípio de Substituição de Steinitz)** Se  $G = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$  é gerador e  $L = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  é l.i., então  $m \leq n$  e existem  $u_1, \dots, u_m \in G$  distintos tais que  $(G \setminus \{u_1, \dots, u_m\}) \cup L$  é união disjunta e gera  $V$ .

**Demonstração** Uma vez que  $G$  é gerador, é possível encontrar  $a_1, \dots, a_n \in k$  tais que  $v_1 = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ . Ao menos um coeficiente dessa soma é diferente de zero, afinal  $L$  é l.i. e, portanto,  $v_1 \neq 0$ . Sem perda de generalidade, vamos tomar  $a_1 \neq 0$ . Disso segue que

$$w_1 = a_1^{-1} v_1 - \sum_{i=2}^n (a_1^{-1} a_i) w_i . \quad (1)$$

Isso significa que podemos substituir  $u_1 = w_1$  por  $v_1$  de modo que  $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$  é um conjunto gerador.

Agora, podemos escrever  $v_2 = b_1 v_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n$ . Da independência linear de  $L$ , devemos ter  $v_2 \neq b_1 v_1$ , então  $b_i \neq 0$  para algum  $i \geq 2$ . Assim como fizemos com  $w_1$  e  $v_1$ , podemos substituir  $u_2 = w_i$  por  $v_2$  e obtemos novamente um conjunto gerador.

Repetindo esse processo reiteradamente, se  $m \leq n$ , substituímos  $m$  elementos de  $G$  pelos elementos de  $L$ . Se  $m > n$ , então encontramos  $n$  elementos de  $L$  que geram  $V$ , incluindo os demais  $n - m$  elementos de  $L$ , contrariando a hipótese inicial de que  $L$  é l.i. □

Pro caso em que  $V$  não possui conjunto finito de geradores, precisamos apelar novamente pro Lema de Zorn, que nos garante que, dado  $L \subset V$  l.i., existe uma base  $B \subset V$  tal que  $L \subset B$ . Dessa forma, é suficiente provar que  $|G| \geq |B|$ . Também podemos e vamos assumir sem qualquer prejuízo que  $0 \notin G$ .

Cada  $w \in G$  possui uma única decomposição da forma  $w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$  com  $a_i \neq 0$  e  $v_i \in B$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $D_w \subset B$  o conjunto finito de todos os vetores  $v_i$  que aparecem na decomposição de  $w$ . Façamos, então,  $D = \bigcup_{w \in G} D_w \subset B$ . Note que  $D$  é o subconjunto de  $B$  composto por todos os vetores necessários para gerar  $G$ . Porque  $G$  é infinito e cada  $D_w$  é finito, vale  $|D| \leq |G|$  (aqui tem mais um pouco de Axioma da Escolha).

Suponhamos que  $|G| < |B|$ . Então  $|D| < |B|$ , o que implica que existe um vetor  $v \in B \setminus D$ . Por hipótese,  $G$  gera  $V$ , então é possível escrever  $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$  com  $w_i \in G$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por outro lado, cada  $w_i$  pode ser escrito com combinação linear de vetores de  $D$ . Ou seja,  $v$  pode ser escrito como combinação linear de vetores de  $B$ , contrariando o fato de que tal conjunto é l.i. Assim, temos  $|G| \geq |B|$ , como desejado.

Feito tudo isso, temos que todo conjunto gerador tem cardinalidade maior ou igual que qualquer conjunto l.i. Como bases são conjuntos geradores e l.i., todas as bases têm a mesma cardinalidade, que é justamente o máximo de  $\{|L| : L \subset V \text{ é l.i.}\}$ , ou seja, a dimensão do espaço. Aliás, de posse disso é possível provar o Princípio de Substituição de Steinitz pra espaços vetoriais quaisquer, o que fica de exercício para quem está lendo.