Da relação entre dimensão e base

Domínio Genérico • 10 Nov 2023

Ainda na onda de descrever conceitos de Álgebra Linear de um jeito mais natural, quer dizer, sem base, trago uma questão muito séria aqui: por que definir dimensão como a cardinalidade das bases? Que coisa terrível estabelecer algo tão natural como dimensão sobre algo tão arbitrário como base! Aqui proponho duas alternativas. A primeira me foi sugerida por um amigo quando discutíamos esse assunto, mas eu prefiro a segunda, que não lembro de ter encontrado em lugar nenhum. As duas definições propostas são, obviamente, equivalentes à definição padrão e, portanto, as três se sustentam sobre os mesmo fatos, que também serão aqui demonstrados.

O principal ingrediente pra definir apropriadamente dimensão de um espaço vetorial é enxergar conjuntos linearmente independentes como conjuntos de direções independentes. Informalmente, queremos que a dimensão de um espaço vetorial expresse o número máximo de direções independentes no espaço.

Seja V um k-espaço vetorial, sem qualquer restrição. Pra quem acredita no Axioma da Escolha, mais especificamente na sua manifestação como Lema de Zorn (espero que todo mundo), V possui uma base, ou seja, existe um cardinal λ e um conjunto l.i. $\{v_i : i \in \lambda\} \subset V$ que gera V. Então existe um isomorfismo $V \to \bigoplus_{i\in\lambda} k : v_i \mapsto e_i$, onde $\{e_i : i \in \lambda\}$ é a base canônica de $\bigoplus_{i\in\lambda} k$.

Invoquei o Lema de Zorn pra dar conta de espaços vetoriais quaisquer. No caso em que V é finitamente gerado, não há necessidade de ir tão longe: dado um conjunto gerador finito l.d., é possível eliminar elementos de forma apropriada até obter um conjunto gerador l.i. – em outras palavras, uma base. Feito isso, temos um isomorfismo $V \simeq k^n$ pra algum $n \in \mathbb{N}$.

Pronto, agora podemos deixar base pra lá, só precisávamos mostrar que pra todo V existe um cardinal λ tal que $V \simeq \bigoplus_{i\in\lambda} k$.

Definição 1 A dimensão de V é o cardinal $\dim V$ tal que $V \simeq \bigoplus_{i\in\dim V} k$.

Essa definição deixa mais ou menos clara a relação entre dimensão e o número de direções independentes ao expressar o espaço vetorial como uma soma direta de cópias do corpo, que nada mais é do que uma colagem de direções

independentes. É óbvio que, nessa definição, dimensão coincide com a cardinalidade de uma base de V. Provaremos em breve que todas as bases tem mesma cardinalidade.

A segunda – e, na minha opinião, melhor – alternativa é mais direta:

Definição 2 A dimensão de V é o cardinal

$$\dim V = \max\{|L| : L \subset V \text{ é l.i.}\} \ .$$

Pra mostrar que a definição acima funciona, vamos provar que qualquer conjunto gerador $G \subset V$ satisfaz $|G| \geq |L|$ para qualquer conjunto l.i. $L \subset V$. Novamente, se V é finitamente gerado, a coisa é um tanto simples e decorre de um resultado conhecido como Princípio de Substituição de Steinitz.

Teorema 3 (Princípio de Substituição de Steinitz) Se $G = \{w_1, ..., w_n\} \subset V$ é gerador e $L = \{v_1, ..., v_m\} \subset V$ é l.i., então $m \leq n$ e existem $u_1, ..., u_m \in G$ distintos tais que $(G \backslash \{u_1, ..., u_m\}) \cup L$ é união disjunta e gera V.

Demonstração Uma vez que G é gerador, é possível encontrar $a_1, ..., a_n \in k$ tais que $v_1 = a_1\, w_1 + ... + a_n\, w_n$. Ao menos um coeficiente dessa soma é diferente de zero, afinal L é l.i. e, portanto, $v_1 \neq 0$. Sem perda de generalidade, vamos tomar $a_1 \neq 0$. Disso segue que

$$w_1 = a_1^{-1} v_1 - \sum_{i=2}^{n} (a_1^{-1} a_i)\, w_i \ . \tag{1}$$

Isso significa que podemos substituir $u_1 = w_1$ por v_1 de modo que $\{v_1, w_2, ..., w_n\}$ é um conjunto gerador.

Agora, podemos escrever $v_2 = b_1\, v_1 + b_2\, w_2 + ... + b_n\, w_n$. Da independência linear de L, devemos ter $v_2 \neq b_1\, v_1$, então $b_i \neq 0$ para algum $i \geq 2$. Assim como fizemos com w_1 e v_1, podemos substituir $u_2 = w_i$ por v_2 e obtemos novamente um conjunto gerador.

Repetindo esse processo reiteradamente, se $m \leq n$, substituímos m elementos de G pelos elementos de L. Se $m > n$, então encontramos n elementos de L que geram V, incluindo os demais $n - m$ elementos de L, contrariando a hipótese inicial de que L é l.i. □

Pro caso em que V não possui conjunto finito de geradores, precisamos apelar novamente pro Lema de Zorn, que nos garante que, dado $L \subset V$ l.i., existe uma base $B \subset V$ tal que $L \subset B$. Dessa forma, é suficiente provar que $|G| \geq |B|$. Também podemos e vamos assumir sem qualquer prejuízo que $0 \notin G$.

Cada $w \in G$ possui uma única decomposição da forma $w = a_1\, v_1 + ... + a_n\, v_n$ com $a_i \neq 0$ e $v_i \in B$ para todo $i = 1, ..., n$. Seja $D_w \subset B$ o conjunto finito de todos os vetores v_i que aparecem na decomposição de w. Façamos, então, $D = \bigcup_{w \in G} D_w \subset B$. Note que D é o subconjunto de B composto por todos os vetores necessários para gerar G. Porque G é infinito e cada D_w é finito, vale $|D| \leq |G|$ (aqui tem mais um pouco de Axioma da Escolha).

Suponhamos que $|G| < |B|$. Então $|D| < |B|$, o que implica que existe um vetor $v \in B \backslash D$. Por hipótese, G gera V, então é possível escrever $v = a_1\, w_1 + ... + a_n\, w_n$ com $w_i \in G$ para todo $i = 1, ..., n$. Por outro lado, cada w_i pode ser escrito com combinação linear de vetores de D. Ou seja, v pode ser escrito como combinação linear de vetores de B, contrariando o fato de que tal conjunto é l.i. Assim, temos $|G| \geq |B|$, como desejado.

Feito tudo isso, temos que todo conjunto gerador tem cardinalidade maior ou igual que qualquer conjunto l.i. Como bases são conjuntos geradores e l.i., todas as bases têm a mesma cardinalidade, que é justamente o máximo de $\{|L| : L \subset V \text{ é l.i.}\}$, ou seja, a dimensão do espaço. Aliás, de posse disso é possível provar o Princípio de Substituição de Steinitz pra espaços vetoriais quaisquer, o que fica de exercício para quem está lendo.