Naturalizando o determinante

written by Domínio Genérico on Functor Network
original link: https://functor.network/user/350/entry/102

É comum ouvir por aí que determinante de matrizes é algo arbitrário com propriedades mágicas, o que contrasta com a suposta simplicidade do conceito, que é ensinado até mesmo no ensino médio. Mas ao contrário do que muitos dizem, a Matemática não é o reino da abstração sem sentido. Então resolvi escrever essa publicação descrevendo uma abordagem em que a definição surge naturalmente a partir de algumas considerações geométricas e todas as boas propriedades se tornam triviais. Essa abordagem pode ser encontrada parcialmente neste vídeo do 3B1B e nestas notas de aula do Prof. Sheel Ganatra da University of Southern California. Infelizmente, desconheço referências em português.

A fórmula padrão de determinante é simples nos casos de matrizes 2×2 e 3×3:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb \ , \tag{1}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \ . \tag{2}$$

A partir disso, a situação fica meio insustentável. Para uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \ ,$$

temos que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \ , \tag{3}$$

onde S_n é o grupo de permutações do conjunto $\{1, ..., n\}$, ou seja, $\sigma \in S_n$ se, e somente se, $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ é uma bijeção, e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é o sinal de σ, i.e.,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 \ , \text{ se } \sigma \text{ é par} \\ -1 \ , \text{ se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases} \ . \tag{4}$$

As expressões (1) e (2) são facilmente deduzidas da equação (3).

Agora vamos abandonar tudo isso e começar do começo: nunca ouvimos falar de determinante, só estamos interessados em estudar geometria plana e vamos usar o poderoso ferramental da Álgebra Linear. Faremos tudo do jeito mais pedestre possível.

Queremos desenvolver uma noção de volume em $\mathbb{R}^n$. Pra isso, vamos construir um mapa $\mathrm{vol}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{vol}_n(v_1, ..., v_n) \geq 0$ é o volume do paralelepípedo

$$p(v_1, ..., v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i : 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

gerado pelos vetores $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$.

O paralelepípedo gerado pela base canônica $\{e_1, ..., e_n\}$ – onde $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$ e assim por diante... – é um cubo de aresta unitária, de modo que faz sentido tomá-lo como unidade de referência, i.e.,

$$\mathrm{vol}_n(e_1, ..., e_n) = 1 \; . \tag{5}$$

De maneira geral, se o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ é l.d., então o paralelepípedo gerado por eles é uma figura de dimensão menor que n. Nesse caso, queremos que seu volume seja nulo da mesma forma que um segmento de reta tem área nula e uma figura plana tem volume tridimensional nulo. Por outro lado, se $\{v_1, ..., v_n\}$ é l.i., então faz sentido que $p(v_1, ..., v_n)$ tenha volume estritamente positivo. Assim,

$$\mathrm{vol}_n(v_1, ..., v_n) > 0 \iff \{v_1, ..., v_n\} \text{ é l.i.} \tag{6}$$

Além disso, se esticarmos ou encolhermos um dos vetores que geram o paralelepípedo, também é de se esperar que o volume seja alterado na mesma escala:

$$\mathrm{vol}_n(v_1, ..., a\, v_i, ..., v_n) = |a| \mathrm{vol}_n(v_1, ..., v_i, ..., v_n) \; . \tag{7}$$

Vejamos o caso de $\mathbb{R}^2$ onde vol_2 é a área. Dados $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, um mero desenho revela que

$$\mathrm{vol}_2(v_1, v_2) = |x_1 y_2 - x_2 y_1| \; . \tag{8}$$

No caso de $\mathbb{R}^3$, o desenho fica um pouco mais complicado, mas ainda é possível deduzir com alguns rabiscos que, dados $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, o volume canônico é dado por

$$\mathrm{vol}_3(v_1, v_2, v_3) = |x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3| \; . \tag{9}$$

Nos dois casos, temos

$$\mathrm{vol}_n(v_1, ..., v_n) = |f(v_1, ..., v_n)| \, , \tag{10}$$

onde $f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ é uma *forma multilinear alternada* que satisfaz $f(e_1, ..., e_n) = 1$.

Como estamos trabalhando com espaços vetoriais, é sempre interessante buscar coisas que manifestem linearidade. Em analogia ao uso de produto interno pra construir uma noção de tamanho definindo a norma $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, convém usar uma estrutura multilinear pra construir vol_n.

Por uma questão de completeza, vamos definir multilinearidade e alternância em geral. Sejam V e W espaços vetoriais sobre k. Um mapa $f : V^m \to W$ é *multilinear* se é linear em todas as coordenadas:

$$f(v_1, ..., a\, v_i + v_i', ..., v_m) = a\, f(v_1, ..., v_i, ..., v_m) + f(v_1, ..., v_i', ..., v_m) \tag{11}$$

para $i = 1, ..., m$. Se $W = k$, então f é uma *forma multilinear*.

Dizemos que o mapa f é *alternado* se é nulo sempre que duas entradas distintas recebem o mesmo vetor:

$$\exists\, i \neq j : v_i = v_j \implies f(v_1, ..., v_m) = 0 \ . \tag{12}$$

Uma alternativa à definição de mapa alternado é a definição de mapa *antissimétrico*:

$$f(v_1, ..., v_m) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(m)}) \tag{13}$$

para $\sigma \in S_m$. Se k tem característica diferente de 2, uma forma multilinear f é alternada se, e somente se, é antissimétrica:

$$f(v_1 + v_2, v_1 + v_2, ..., v_m) = 0 \iff f(v_1, v_2, ..., v_m) = -f(v_2, v_1, ..., v_m) \ . \tag{14}$$

Pra k com característica igual a 2, alternância implica em antissimetria, mas a recíproca pode falhar (abrindo as contas da equivalência (14) fica claro que o sentido $\Leftarrow$ precisa que $1 + 1 \neq 0$). Formas antissimétricas são de particular interesse porque indicam orientação: uma permutação ímpar nos elementos de uma base corresponde a uma mudança de orientação.

A partir de agora, vamos muito oportunamente economizar notação e denotar por $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V.

Teorema 1 Existe uma única forma multilinear alternada $f : V^n \to k$ satisfazendo $f(e_1, ..., e_n) = 1$.

A existência é óbvia. A unicidade pode ser provada com algumas contas, mas vamos aplicar um outro método de demonstração que é bem recorrente na Matemática: apelar pra definições que trivializam o resultado. No caso, vamos recorrer ao produto cunha.

Dado $1 \leq m \leq n$, o m-ésimo produto cunha de V é o espaço quociente

$$\bigwedge^m V = \left(\bigotimes^m V \right) / \, U \ ,$$

onde $U \subset \bigotimes^m V$ é o subespaço gerador por tensores $u_1 \otimes ... \otimes u_m$ em que existem $i \neq j$ tais que $u_i = u_j$. Denotamos a classe de equivalência de $v_1 \otimes ... \otimes v_m$ por $v_1 \wedge ... \wedge v_m$.

Operacionalmente, $\bigwedge^m V$ é gerado por vetores da forma $v_1 \wedge ... \wedge v_m$, onde $\wedge$ é um produto multilinear alternado tal que

$$\{v_1, ..., v_m\} \text{ l.i. } \iff v_1 \wedge ... \wedge v_m \neq 0 \tag{15}$$

e o conjunto $S = \{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_m} : i_1, ..., i_m \text{ é crescente}\}$ é uma base de $\bigwedge^m V$. Tal base é formada por todas as possíveis escolhas de m elementos distintos dum conjunto com n elementos, logo,

$$\dim \bigwedge^m V = \binom{n}{m} . \tag{16}$$

Teorema 2 (Propriedade Universal do Produto Cunha) Se $f : V^m \to W$ é uma forma multilinear alternada, então existe uma única transformação linear $F : \bigwedge^m V \to W$ tal que

$$f(v_1, ..., v_n) = F(v_1 \wedge ... \wedge v_n) . \tag{17}$$

Demonstração A existência e a unicidade de F é garantida por construção. A transformação é completamente determinada pelos seus valores na base S: $F(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_m}) = f(e_{i_1}, ..., e_{i_m})$.

Estamos interessados em formas multilineares alternadas definidas em V^n. O produto cunha $\bigwedge^n V$ é um espaço vetorial unidimensional, com base $e_1 \wedge ... \wedge e_n$. Dessa forma, dados quaisquer $v_1, ..., v_n \in V$, temos que

$$v_1 \wedge ... \wedge v_n = \lambda\, e_1 \wedge ... \wedge e_n . \tag{18}$$

para algum $\lambda \in k$.

Demonstração do Teorema 1 Sejam $f, f' : V^n \to k$ formas multilineares alternada satisfazendo $f(e_1, ..., e_n) = f'(e_1, ..., e_n) = 1$. Sejam $F, F' : \bigwedge^n V \to k$ as formas lineares induzidas respectivamente por f e f' segundo a Propriedade Universal. Em particular, $F(e_1 \wedge ... \wedge e_n) = F'(e_1 \wedge ... \wedge e_n) = 1$. Então, por (18),

$$\begin{cases} f(v_1, ..., v_n) = F(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = F(\lambda\, e_1 \wedge ... \wedge e_n) = \lambda \\ f'(v_1, ..., v_n) = F'(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = F'(\lambda\, e_1 \wedge ... \wedge e_n) = \lambda \end{cases} . \tag{19}$$

Ou seja, $f(v_1, ..., v_n) = f'(v_1, ..., v_n)$

Pronto! Agora temos que $\text{vol}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\text{vol}_n(v_1, ..., v_n) = |f(v_1, ..., v_n)|$, onde $f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ é a única forma multilinear alternada que satisfaz $f(e_1, ..., e_n) = 1$, está bem definido e dá o que já conhecemos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Isso, por si só, já é o suficiente pra definir determinante de uma matrizes quadrada real A de ordem n como $f(A(e_1), ..., A(e_n)) = F(A(e_1) \wedge ... \wedge A(e_1))$, onde $F : \bigwedge^n \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a forma linear induzida por f. Esse número, cujo sinal indica se A preserva ou não orientação, nada mais é do que uma medida da deformação de volume gerada por A. Mas, pra evitar ficar dando voltas e causar confusão, vou definir determinante de forma mais geral. Este pequeno comentário serve para motivar a definição que trago abaixo.

Uma transformação linear $T : V \to V$ induz uma transformação linear $\widehat{T} : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$ dada por $\widehat{T}(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = T(v_1) \wedge ... \wedge T(v_n)$. Como $\bigwedge^n V$ é unidimensional, $\widehat{T}$ é multiplicação por um escalar, tal escalar é precisamente $\det(T)$, i.e.,

$$T(v_1) \wedge ... \wedge T(v_n) = \det(T)\, v_1 \wedge ... \wedge v_n \ . \tag{20}$$

Voltando a $\mathbb{R}^n$, usando f e F, é fácil verificar que

$$\mathrm{vol}_n(T(v_1), ..., T(v_n)) = |\det(T)| \mathrm{vol}_n(v_1, ..., v_n) \ , \tag{21}$$

e

$$\det(T) > 0 \iff T \text{ preserva orientação} \ . \tag{22}$$

Usando o fato de que a entrada (i, j) da representação matricial de T na base $\{e_1, ..., e_n\}$ é a componente de $T(e_j)$ nada direção de e_i, obtemos a fórmula geral de determinante (3). Só que a definição não depende de base, então não importa a base na qual escrevemos a representação matricial de T, seu determinante é o mesmo.

Feito tudo isso, algumas propriedades se tornam óbvias. Primeiro, se I é a identidade, então

$$\det(I) = 1 \ . \tag{23}$$

Em segundo lugar, algo que já estava implícito há algumas linhas:

$$\det(T) \neq 0 \iff T \text{ é invertível} \ , \tag{24}$$

afinal $\det(T) \neq 0$ equivale a dizer que existem $latex v_1, ..., v_n \in V$ tal que $T(v_1) \wedge ... \wedge T(v_n) \neq 0$, i.e., $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é l.i.

Temos também que

$$\widehat{TS}(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = TS(v_1) \wedge ... \wedge ...TS(v_n) = \widehat{T}\widehat{S}(v_1 \wedge ... \wedge v_n) \ , \tag{25}$$

então $\widehat{TS} = \widehat{T}\widehat{S}$, o que implica que

$$\det(TS) = \det(T) \det(S) \ . \tag{26}$$

Disso segue que, se T é invertível, então $\det(T) \det(T^{-1}) = \det(TT^{-1}) = 1$, o que nos dá

$$\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1} \ . \tag{27}$$

Por fim,

$$\widehat{aT}(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = aT(v_1) \wedge ... \wedge aT(v_n) = a^n\, \widehat{T}(v_1 \wedge ... \wedge v_n) \ , \tag{28}$$

de modo que

$$\det(aT) = a^n \det(T) \ . \tag{29}$$

Acredito que isso seja o suficiente pra convencer quem quer que seja de que determinante não é algo tão arbitrário. Aliás, não é nada arbitrário, está profundamente ligado às noções de volume e orientação que apreendemos do plano e do espaço tridimensional. Talvez a parte de orientação tenha ficado a desejar, quem sabe num próximo texto eu fale mais sobre o tema...