

Naturalizando o determinante

Domínio Genérico • 28 Oct 2023

É comum ouvir por aí que determinante de matrizes é algo arbitrário com propriedades mágicas, o que contrasta com a suposta simplicidade do conceito, que é ensinado até mesmo no ensino médio. Mas ao contrário do que muitos dizem, a Matemática não é o reino da abstração sem sentido. Então resolvi escrever essa publicação descrevendo uma abordagem em que a definição surge naturalmente a partir de algumas considerações geométricas e todas as boas propriedades se tornam triviais. Essa abordagem pode ser encontrada parcialmente [neste vídeo](#) do 3B1B e [nestas notas de aula](#) do Prof. Sheel Ganatra da University of Southern California. Infelizmente, desconheço referências em português.

A fórmula padrão de determinante é simples nos casos de matrizes 2×2 e 3×3 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb, \quad (1)$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb. \quad (2)$$

A partir disso, a situação fica meio insustentável. Para uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

temos que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}, \quad (3)$$

onde S_n é o grupo de permutações do conjunto $\{1, \dots, n\}$, ou seja, $\sigma \in S_n$ se, e somente se, $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ é uma bijeção, e $\text{sgn}(\sigma)$ é o sinal de σ , i.e.,

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}. \quad (4)$$

As expressões (1) e (2) são facilmente deduzidas da equação (3).

Agora vamos abandonar tudo isso e começar do começo: nunca ouvimos falar de determinante, só estamos interessados em estudar geometria plana e vamos usar o poderoso ferramental da Álgebra Linear. Faremos tudo do jeito mais pedestre possível.

Queremos desenvolver uma noção de volume em \mathbb{R}^n . Pra isso, vamos construir um mapa $\text{vol}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) \geq 0$ é o volume do paralelepípedo

$$p(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

O paralelepípedo gerado pela base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ – onde $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ e assim por diante... – é um cubo de aresta unitária, de modo que faz sentido tomá-lo como unidade de referência, i.e.,

$$\text{vol}_n(e_1, \dots, e_n) = 1 . \quad (5)$$

De maneira geral, se o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.d., então o paralelepípedo gerado por eles é uma figura de dimensão menor que n . Nesse caso, queremos que seu volume seja nulo da mesma forma que um segmento de reta tem área nula e uma figura plana tem volume tridimensional nulo. Por outro lado, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i., então faz sentido que $p(v_1, \dots, v_n)$ tenha volume estritamente positivo.

Assim,

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) > 0 \iff \{v_1, \dots, v_n\} \text{ é l.i.} \quad (6)$$

Além disso, se esticarmos ou encolhermos um dos vetores que geram o paralelepípedo, também é de se esperar que o volume seja alterado na mesma escala:

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, a v_i, \dots, v_n) = |a| \text{vol}_n(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) . \quad (7)$$

Vejamos o caso de \mathbb{R}^2 onde vol_2 é a área. Dados $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, um mero desenho revela que

$$\text{vol}_2(v_1, v_2) = |x_1 y_2 - x_2 y_1| . \quad (8)$$

No caso de \mathbb{R}^3 , o desenho fica um pouco mais complicado, mas ainda é possível deduzir com alguns rabiscos que, dados $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, o volume canônico é dado por

$$\text{vol}_3(v_1, v_2, v_3) = |x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3| . \quad (9)$$

Nos dois casos, temos

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = |f(v_1, \dots, v_n)|, \quad (10)$$

onde $f : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *forma multilinear alternada* que satisfaz $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Como estamos trabalhando com espaços vetoriais, é sempre interessante buscar coisas que manifestem linearidade. Em analogia ao uso de produto interno pra construir uma noção de tamanho definindo a norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, convém usar uma estrutura multilinear pra construir vol_n .

Por uma questão de completeza, vamos definir multilinearidade e alternância em geral. Sejam V e W espaços vetoriais sobre k . Um mapa $f : V^m \rightarrow W$ é *multilinear* se é linear em todas as coordenadas:

$$f(v_1, \dots, a v_i + v'_i, \dots, v_m) = a f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_m) \quad (11)$$

para $i = 1, \dots, m$. Se $W = k$, então f é uma *forma multilinear*.

Dizemos que o mapa f é *alternado* se é nulo sempre que duas entradas distintas recebem o mesmo vetor:

$$\exists i \neq j : v_i = v_j \implies f(v_1, \dots, v_m) = 0. \quad (12)$$

Uma alternativa à definição de mapa alternado é a definição de mapa *antissimétrico*:

$$f(v_1, \dots, v_m) = \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) \quad (13)$$

para $\sigma \in S_m$. Se k tem característica diferente de 2, uma forma multilinear f é alternada se, e somente se, é antissimétrica:

$$f(v_1+v_2, v_1+v_2, \dots, v_m) = 0 \iff f(v_1, v_2, \dots, v_m) = -f(v_2, v_1, \dots, v_m). \quad (14)$$

Pra k com característica igual a 2, alternância implica em antissimetria, mas a recíproca pode falhar (abrindo as contas da equivalência (14) fica claro que o sentido \Leftarrow precisa que $1 + 1 \neq 0$). Formas antissimétricas são de particular interesse porque indicam orientação: uma permutação ímpar nos elementos de uma base corresponde a uma mudança de orientação.

A partir de agora, vamos muito oportunamente economizar notação e denotar por $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V .

Teorema 1 Existe uma única forma multilinear alternada $f : V^n \rightarrow k$ satisfazendo $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

A existência é óbvia. A unicidade pode ser provada com algumas contas, mas vamos aplicar um outro método de demonstração que é bem recorrente na Matemática: apelar pra definições que trivializam o resultado. No caso, vamos recorrer ao produto cunha.

Dado $1 \leq m \leq n$, o m -ésimo produto cunha de V é o espaço quociente

$$\bigwedge^m V = \left(\bigotimes^m V \right) / U ,$$

onde $U \subset \bigotimes^m V$ é o subespaço gerador por tensores $u_1 \otimes \dots \otimes u_m$ em que existem $i \neq j$ tais que $u_i = u_j$. Denotamos a classe de equivalência de $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ por $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$.

Operacionalmente, $\bigwedge^m V$ é gerado por vetores da forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$, onde \wedge é um produto multilinear alternado tal que

$$\{v_1, \dots, v_m\} \text{ l.i.} \iff v_1 \wedge \dots \wedge v_m \neq 0 \quad (15)$$

e o conjunto $S = \{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} : i_1, \dots, i_m \text{ é crescente}\}$ é uma base de $\bigwedge^m V$. Tal base é formada por todas as possíveis escolhas de m elementos distintos dum conjunto com n elementos, logo,

$$\dim \bigwedge^m V = \binom{n}{m} . \quad (16)$$

Teorema 2 (Propriedade Universal do Produto Cunha) Se $f : V^m \rightarrow W$ é uma forma multilinear alternada, então existe uma única transformação linear $F : \bigwedge^m V \rightarrow W$ tal que

$$f(v_1, \dots, v_m) = F(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) . \quad (17)$$

Demonstração A existência e a unicidade de F é garantida por construção. A transformação é completamente determinada pelos seus valores na base S :

$$F(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}) = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) . \quad \square$$

Estamos interessados em formas multilineares alternadas definidas em V^n . O produto cunha $\bigwedge^n V$ é um espaço vetorial unidimensional, com base $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Dessa forma, dados quaisquer $v_1, \dots, v_n \in V$, temos que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_n . \quad (18)$$

para algum $\lambda \in k$.

Demonstração do Teorema 1 Sejam $f, f' : V^n \rightarrow k$ formas multilineares alternadas satisfazendo $f(e_1, \dots, e_n) = f'(e_1, \dots, e_n) = 1$. Sejam

$F, F' : \bigwedge^n V \rightarrow k$ as formas lineares induzidas respectivamente por f e f' segundo a Propriedade Universal. Em particular,

$$F(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = F'(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = 1. \text{ Então, por (18),}$$

$$\begin{cases} f(v_1, \dots, v_n) = F(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = F(\lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \lambda \\ f'(v_1, \dots, v_n) = F'(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = F'(\lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \lambda \end{cases} . \quad (19)$$

Ou seja, $f(v_1, \dots, v_n) = f'(v_1, \dots, v_n)$ □

Pronto! Agora temos que $\text{vol}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = |f(v_1, \dots, v_n)|$, onde $f : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a única forma multilinear alternada que satisfaz $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, está bem definido e dá o que já conhecemos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Isso, por si só, já é o suficiente pra definir determinante de uma matrizes quadrada real A de ordem n como $f(A(e_1), \dots, A(e_n)) = F(A(e_1) \wedge \dots \wedge A(e_n))$, onde $F : \bigwedge^n \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma linear induzida por f . Esse número, cujo sinal indica se A preserva ou não orientação, nada mais é do que uma medida da deformação de volume gerada por A . Mas, pra evitar ficar dando voltas e causar confusão, vou definir determinante de forma mais geral. Este pequeno comentário serve para motivar a definição que trago abaixo.

Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ induz uma transformação linear $\widehat{T} : \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^n V$ dada por $\widehat{T}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = T(v_1) \wedge \dots \wedge T(v_n)$. Como $\bigwedge^n V$ é unidimensional, \widehat{T} é multiplicação por um escalar, tal escalar é precisamente $\det(T)$, i.e.,

$$T(v_1) \wedge \dots \wedge T(v_n) = \det(T) v_1 \wedge \dots \wedge v_n . \quad (20)$$

Voltando a \mathbb{R}^n , usando f e F , é fácil verificar que

$$\text{vol}_n(T(v_1), \dots, T(v_n)) = |\det(T)| \text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) , \quad (21)$$

e

$$\det(T) > 0 \iff T \text{ preserva orientação} . \quad (22)$$

Usando o fato de que a entrada (i, j) da representação matricial de T na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a componente de $T(e_j)$ na direção de e_i , obtemos a fórmula geral de determinante (3). Só que a definição não depende de base, então não importa a base na qual escrevemos a representação matricial de T , seu determinante é o mesmo.

Feito tudo isso, algumas propriedades se tornam óbvias. Primeiro, se I é a identidade, então

$$\det(I) = 1 . \quad (23)$$

Em segundo lugar, algo que já estava implícito há algumas linhas:

$$\det(T) \neq 0 \iff T \text{ é invertível} , \quad (24)$$

afinal $\det(T) \neq 0$ equivale a dizer que existem $v_1, \dots, v_n \in V$ tal que $T(v_1) \wedge \dots \wedge T(v_n) \neq 0$, i.e., $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é l.i.

Temos também que

$$\widehat{TS}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = TS(v_1) \wedge \dots \wedge TS(v_n) = \widehat{T}\widehat{S}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) , \quad (25)$$

então $\widehat{TS} = \widehat{T}\widehat{S}$, o que implica que

$$\det(TS) = \det(T) \det(S) . \quad (26)$$

Disso segue que, se T é invertível, então $\det(T) \det(T^{-1}) = \det(TT^{-1}) = 1$, o que nos dá

$$\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1} . \quad (27)$$

Por fim,

$$\widehat{aT}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = aT(v_1) \wedge \dots \wedge aT(v_n) = a^n \widehat{T}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) , \quad (28)$$

de modo que

$$\det(aT) = a^n \det(T) . \quad (29)$$

Acredito que isso seja o suficiente pra convencer quem quer que seja de que determinante não é algo tão arbitrário. Aliás, não é nada arbitrário, está profundamente ligado às noções de volume e orientação que apreendemos do plano e do espaço tridimensional. Talvez a parte de orientação tenha ficado a desejar, quem sabe num próximo texto eu fale mais sobre o tema...