Με πόσους τρόπους μπορείς να ανέβεις τη σκάλα;

UniMathTutor Blog · 9 Oct 2026

https://functor.network/user/3349/entry/2004

Διατύπωση τού προβλήματος

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ανέβουμε μια σκάλα η οποία αποτελείται από n σκαλοπάτια. Σε κάθε βήμα, ανεβαίνουμε είτε **ακριβώς ένα** σκαλί, είτε **ακριβώς δύο** σκαλιά. Με πόσους τρόπους μπορούμε να ανέβουμε τη σκάλα;

Για μικρά n

- Για $n = 1$ έχουμε 1 τρόπο: (1) –κάνουμε ένα βήμα μήκους 1.
- Για $n = 2$ έχουμε 2 τρόπους: $(1, 1), (2)$ –είτε κάνουμε δύο βήματα μήκους 1, είτε ένα βήμα μήκους 2.
- Για $n = 3$ έχουμε 3 τρόπους: $(1, 1, 1), (1, 2), (2, 1)$.
- Για $n = 4$ έχουμε 5 τρόπους: $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 2)$.

Τι γίνεται όμως για μεγάλα n; Για $n = 100$ ας πούμε;
Φυσικά είναι σχεδόν αδύνατο να κάνει κανείς τον υπολογισμό όπως πριν. Θα πρέπει να σκεφτούμε κάτι πιο έξυπνο, το οποίο μας δίνει απάντηση για οποιοδήποτε n.

Αναδρομική σχέση

Συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των τρόπων να ανέβουμε μια σκάλα με n σκαλοπάτια. Από τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5.$$

Το συνδυαστικό επιχείρημα: Όταν θέλουμε να ανεβούμε μια σκάλα με n σκαλοπάτια, στο πρώτο βήμα είτε θα ανέβουμε ακριβώς 1 σκαλί και μένουν άλλα $n - 1$ τα οποία μπορούμε να ανέβουμε με a_{n-1} τρόπους, είτε θα ανέβουμε ακριβώς 2 σκαλιά και μένουν άλλα $n - 2$ τα οποία μπορούμε να ανέβουμε με a_{n-2} τρόπους. Συνεπώς, για $n = 3, 4, 5, \ldots$ έχουμε

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Ο τύπος της a_n

Μια ακολουθία f_n η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f_1 = f_2 = 1,$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

λέγεται ακολουθία **Fibonacci**. Παρατηρούμε ότι $a_n = f_{n+1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Είτε με χρήση **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**, είτε με **επαγωγή**, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(*Για διάφορες αποδείξεις τού τύπου δες τους συνδέσμους στο τέλος*)

Για περαιτέρω μελέτη

1. Απόδειξη του τύπου μέσω χαρακτηριστικού πολυωνύμου
2. Απόδειξη με επαγωγή
3. Το πρόβλημα με τα κουνέλια του Fibonacci
4. Αριθμοί Fibonacci και διωνυμικοί συντελεστές
5. Αριθμοί Fibonacci και χρυσή τομή