

$$0.999\ldots = 1$$

UniMathTutor Blog • 17 Sep 2026

<https://functor.network/user/3349/entry/1986>

Εισαγωγή

$$0.999\ldots = 1;$$

Πολλοί δυσκολεύονται να το δεχτούν, διότι βλέπουν γραμμένες δύο διαφορετικές εκφράσεις. Ωστόσο, είναι ο ίδιος ακριβώς αριθμός, τον οποίο έχουμε αναπαράσχει με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Μια απόδειξη που θέλει επιπλέον αιτιολόγηση

Έστω $x = 0.999\ldots$. Τότε

$$10x = 9.999\ldots$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις:

$$10x - x = 9.999\ldots - 0.999\ldots \implies 9x = 9 \implies x = 1.$$

Η αυστηρή απόδειξη

Το $0.999\ldots$ είναι εξ ορισμού το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων

$$s_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}.$$

Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{10}$, άρα

$$0.999\ldots = \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9/10}{1 - 1/10} = 1.$$

Γιατί η πρώτη απόδειξη δεν είναι αυστηρή

Η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα καλά ορισμένες ενέργειες. Ωστόσο, η έκφραση $0.999\ldots$ είναι απλά ένα σύμβολο το οποίο αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό και κρύβει μια οριακή διαδικασία από πίσω. Έτσι, πριν κάνουμε οποιαδήποτε ενέργεια – ορμώμενοι από τον τρόπο με τον οποίο αυτή γίνεται για αριθμούς με πεπερασμένου πλήθους δεκαδικά ψηφία – θα πρέπει πρώτα να την αποδείξουμε αυστηρά. Τι σημαίνει το “ $\ldots$ ”; πώς ακριβώς ορίζεται το $0.999\ldots$;

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνεπαγωγή

$$x = 0.999\ldots \implies 10x = 9.999\ldots$$

η οποία **δεν** προκύπτει από τον τετριμμένο κανόνα: πολλαπλασιασμός επί 10 σημαίνει μετατοπίζω την υποδιαστολή μια θέση δεξιότερα – όπως νομίζει κανείς με μια πρώτη ανάγνωση. Αυτό που στην πραγματικότητα επικαλούμαστε είναι ότι ο πολλαπλασιασμός με σταθερά περνάει μέσα στο όριο:

$$10 \cdot \lim_n s_n = \lim_n (10s_n),$$

όπου όπως είπαμε παραπάνω $x = \lim_n s_n$ εξ ορισμού.

Φυσικά, το ότι η σταθερά περνάει μέσα στο όριο είναι αληθές και αποδεικνύεται εύκολα, αλλά αποτελεί θεώρημα του *Απειροστικού Λογισμού* και δεν προκύπτει αυτόματα από βασικές αλγεβρικές ιδιότητες αριθμών. Η μη αυστηρή απόδειξη που παρουσιάσαμε παραπάνω το χρησιμοποιεί σιωπηρά, χωρίς να το έχει εισαγάγει, ακριβώς επειδή αντιμετωπίζει το $0.999\ldots$ σαν συμβολοσειρά ψηφίων και όχι σαν αυτό που πραγματικά είναι: ένα όριο.

Γιατί ξενίζει

Ενστικτωδώς, ταυτίζουμε έναν αριθμό με την ακολουθία των ψηφίων του. Το $0.999\ldots$ έχει ψηφία $(9, 9, 9, \ldots)$, ενώ το $1.000\ldots$ έχει ψηφία $(0, 0, 0, \ldots)$ — διαφορετικά σε κάθε θέση. Αν η ισότητα αριθμών οριζόταν ψηφίο-προς-ψηφίο, θα ήταν πράγματι διαφορετικοί. Το γεγονός ότι είναι ίσοι, ενώ οι ακολουθίες ψηφίων τους διαφέρουν παντού, δείχνει ότι η ισότητα πραγματικών αριθμών δεν ορίζεται μέσω των ψηφίων τους.

Συμπέρασμα

Η αναπαράσταση ενός πραγματικού αριθμού σε δεκαδική μορφή δεν είναι πάντα μοναδική, και αυτό είναι ένα από τα πιο απλά παραδείγματα αυτού του φαινομένου.