

Παίζει ρόλο η σειρά των προσθετέων ενός άπειρου αθροίσματος;

UniMathTutor Blog • 16 Sep 2026

<https://functor.network/user/3349/entry/1982>

Εισαγωγή

Όταν αθροίζουμε πεπερασμένους πλήθους αριθμούς, προφανώς δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αν τους αναδιατάξουμε (δηλαδή αν αλλάξουμε τη σειρά που εμφανίζονται οι προσθετέοι στο άθροισμα):

$$1 + 2 + 3 = 3 + 1 + 2.$$

Ισχύει το ίδιο όταν αθροίζουμε άπειρους στο πλήθος αριθμούς;

Η απάντηση, γενικά, είναι **όχι!**

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα άπειρο άθροισμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός, αλλά αν αλλάξουμε κατάλληλα τη σειρά των προσθετέων το αποτέλεσμα ισούται με $+\infty$ (δηλαδή, μια συγκλίνουσα σειρά με αποκλίνουσα αναδιάταξη). Έπειτα, θα δούμε ότι για συγκεκριμένες σειρές όντως η σειρά των προσθετέων δεν παίζει ρόλο, για άλλες όμως, μπορείς να αναδιατάξεις τούς όρους ώστε το άθροισμα να ισούται με **όποιον πραγματικό αριθμό θέλεις!** Αν αυτό σου φαίνεται εντυπωσιακό, καλώς ήρθες στο club!

Το παράδειγμα

Θεωρούμε την εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι η σειρά αυτή συγκλίνει και μάλιστα στο $\ln 2$.

Αν κρατήσουμε τους θετικούς όρους του άθροίσματος, προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$, η οποία προφανώς αποκλίνει. Βάσει αυτού, παρακάτω κατασκευάζουμε μια αποκλίνουσα αναδιάταξη της εναλλάσσουσας σειράς:

Αφού $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$, τότε αν αθροίσω κατάλληλους στο πλήθος όρους το άθροισμά τους θα είναι όσο μεγάλο θέλω. Ιδιαίτερα, υπάρχει δείκτης k_1 ώστε

$$M_1 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k_1-1} > 2.$$

Αφού το άθροισμα των k_1 πρώτων όρων είναι πεπερασμένο και το άθροισμα όλων των όρων ισούται με $+\infty$, τότε το άθροισμα από τον όρο υπ' αριθμόν $k_1 + 1$ και μετά ισούται με $+\infty$. Έτσι, όπως πριν, υπάρχει δείκτης k_2 ώστε

$$M_2 = \frac{1}{2k_1+1} + \frac{1}{2k_1+3} + \dots + \frac{1}{2k_2-1} > 2.$$

Αφού το άθροισμα των k_2 πρώτων όρων είναι πεπερασμένο και το άθροισμα όλων των όρων ισούται με $+\infty$, τότε το άθροισμα από τον όρο υπ' αριθμόν $k_2 + 1$ και μετά ισούται με $+\infty$. Έτσι, όπως πριν, υπάρχει δείκτης k_3 ώστε

$$M_3 = \frac{1}{2k_2+1} + \frac{1}{2k_2+3} + \dots + \frac{1}{2k_3-1} > 2.$$

:

Συνεχίζοντας επαγωγικά, παίρνουμε άπειρα στο πλήθος τέτοια μπλοκ αθροισμάτων: $M_1, M_2, M_3, \dots$, κάθε ένα απ' τα οποία είναι > 2 .

Η επιθυμητή αποκλίνουσα αναδιάταξη είναι:

$$M_1 - \frac{1}{2} + M_2 - \frac{1}{4} + M_3 - \frac{1}{6} + \dots$$

1. Η παραπάνω αναδιάταξη εξαντλεί όλους τους όρους της εναλλάσσουσας σειράς, διότι τα μπλόκ M_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, εξαντλούν τους θετικούς όρους, ενώ οι αρνητικοί προσθετέοι μετά από κάθε μπλοκ εξαντλούν όλους τους αρνητικούς όρους.
2. Η παραπάνω αναδιάταξη αποκλίνει, διότι για κάθε $j = 1, 2, 3, \dots$ ισχύει $M_j - \frac{1}{2j} > 2 - \frac{1}{2j} > 1$.

Τι ισχύει γενικά

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **συγκλίνει απόλυτα**, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

1. Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα στο x , τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο x .
2. **Θεώρημα Riemann.** Αν μια σειρά συγκλίνει, αλλά δε συγκλίνει απόλυτα (συγκλίνει **υπό συνθήκη**), τότε όποιον πραγματικό αριθμό x κι αν προεπιλέξει κανείς, υπάρχει αναδιάταξη της αρχικής σειράς η οποία συγκλίνει στο x .

Συμπέρασμα

Ο αλγόριθμος της πρόσθεσης, όπως τον διδάχτηκαμε στο δημοτικό, εμπεριέχει πεπερασμένου πλήθους προσθετέους και σε ένα τέτοιο άθροισμα η διάταξη των προσθετέων δεν παίζει κανένα ρόλο (η λεγόμενη αντιμεταθετική ιδιότητα). Όταν όμως στο άθροισμα συμμετέχουν άπειροι στο πλήθος όροι, τότε χρειάζονται πιο λεπτοί χειρισμοί. Αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε το άθροισμα είναι ανεξάρτητο οποιασδήποτε αναδιάταξής του. Η υπό συνθήκη σύγκλιση όμως, κρύβει μέσα της απεριόριστη θετική και αρνητική “πίστωση”, και αυτή η ισορροπία είναι εύθραυστη: αρκεί να αλλάξεις τη σειρά για να καταρρεύσει προς όποιον στόχο θες.