1 + 1/2² + 1/3² + 1/4² + . . . = π²/6

UniMathTutor Blog · 1 Feb 2026

https://functor.network/user/3349/entry/1628

Εισαγωγή

Όλοι λίγο πολύ γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Με τι όμως ισούται το αποτέλεσμα αυτής τής άπειρης πρόσθεσης;

Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

και φυσικά αυτό δε θα γίνει “με το χέρι”, αλλά χρησιμοποιώντας κάποια Αρμονική Ανάλυση και πιο συγκεκριμένα θεωρία σειρών Fourier.

Βασικά εργαλεία από σειρές Fourier

Θεωρούμε $f \in L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \{g : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} \mid \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} g^2 < +\infty\}$ και την επεκτείνουμε, λαμβάνοντας κόπιες της, σε $1-$περιοδική συνάρτηση σ’ όλο το $\mathbb{R}$. Οι συντελεστές Fourier τής f ορίζονται ως εξής

$$\hat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx, \ n \in \mathbb{Z}$$

και η σειρά Fourier της

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Για μια τέτοια f ισχύει η ισότητα Parseval

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x)|^2 \, dx.$$

Απόδειξη

Έστω

$$f(x) = x,\ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

και την επεκτείνουμε σε $1-$περιοδική σ' όλο το $\mathbb{R}$. Προφανώς $f \in L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

διότι f περιττή και για κάθε $n \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{-2\pi inx}\,dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\Big(-\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big)'\,dx \\ &= \Big[-x\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi in}\Big(-\frac{1}{2}e^{-\pi in} - \frac{1}{2}e^{\pi in} + \Big[-\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi in}\Big(-(-1)^n + \frac{1}{2\pi in}(e^{-\pi in} - e^{\pi in})\Big) \\ &= -\frac{(-1)^n}{2\pi in}.\end{aligned}$$

Τώρα, από Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx, \tag{1}$$

όπου

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} &= \frac{1}{4\pi^2}\lim_N \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\lim_N 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned} \tag{2}$$

και

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{12}. \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) και (3) το συμπέρασμα έπεται.

Επίλογος

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως το πρόβλημα της Βασιλείας, και λύθηκε πρώτη φορά από τον Euler το 1734, πριν καν υπάρξει η σύγχρονη θεωρία σειρών Fourier που χρησιμοποιήσαμε εδώ. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν διάφορες αποδείξεις, η καθεμία αντλώντας από διαφορετική περιοχή των μαθηματικών (μιγαδική ανάλυση, συνδυαστική, ακόμα και πιθανότητες). Η απόδειξη μέσω Parseval που είδαμε είναι από τις πιο σύντομες, και δείχνει γιατί η Αρμονική Ανάλυση είναι τόσο ισχυρό εργαλείο: μετατρέπει ένα δύσκολο αριθμητικό άθροισμα σε έναν απλό υπολογισμό ολοκληρώματος.

Περισσότερες αποδείξεις:

- Basel problem στη Wikipedia — ιστορικό και σύνοψη
- 18 διαφορετικές αποδείξεις (arXiv)
- Απόδειξη μέσω πιθανοτήτων