# $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ... = \pi^2/6$

UniMathTutor Blog • 1 Feb 2026

## Εισαγωγή

Όλοι λίγο πολύ γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Με τι όμως ισούται το αποτέλεσμα αυτής τής άπειρης πρόσθεσης;

Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

και φυσικά αυτό δε θα γίνει “με το χέρι”, αλλά χρησιμοποιώντας κάποια Αρμονική Ανάλυση και πιο συγκεκριμένα θεωρία σειρών Fourier.

## Βασικά εργαλεία από σειρές Fourier

Θεωρούμε $f \in L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \{g : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} \mid \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} g^2 < +\infty\}$ και την επεκτείνουμε, λαμβάνοντας κόπιες της, σε $1-$περιοδική συνάρτηση σ’ όλο το $\mathbb{R}$. Οι συντελεστές Fourier τής $f$ ορίζονται ως εξής

$$\hat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx, \; n \in \mathbb{Z}$$

και η σειρά Fourier της

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Για μια τέτοια $f$ ισχύει η ισότητα Parseval

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x)|^2 \, dx.$$

# Απόδειξη

Έστω

$$f(x) = x,\ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

και την επεκτείνουμε σε $1-$περιοδική σ' όλο το $\mathbb{R}$. Προφανώς $f \in L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

διότι $f$ περιττή και για κάθε $n \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{-2\pi inx}\,dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\Big(-\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big)'\,dx \\ &= \Big[-x\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi in}\Big(-\frac{1}{2}e^{-\pi in} - \frac{1}{2}e^{\pi in} + \Big[-\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi in}\Big(-(-1)^n + \frac{1}{2\pi in}(e^{-\pi in} - e^{\pi in})\Big) \\ &= -\frac{(-1)^n}{2\pi in}.\end{aligned}$$

Τώρα, από Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx, \tag{1}$$

όπου

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} &= \frac{1}{4\pi^2}\lim_N \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\lim_N 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2)\end{aligned}$$

και

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{12}. \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις $(1),\ (2)$ και $(3)$ το συμπέρασμα έπεται.