Το (0,1) έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με ολόκληρη την πραγματική ευθεία

UniMathTutor Blog • 19 Jan 2026

Εισαγωγή

Είναι προφανές ότι ένα φραγμένο διάστημα είναι γνήσιο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Αυτό που ενδεχομένως δεν είναι προφανές είναι ότι ένα φραγμένο διάστημα έχει πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων με ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Για παράδειγμα, το $(0,1)$ έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το $\mathbb{R}$.

Με μια πρώτη ανάγνωση, ο παραπάνω ισχυρισμός μοιάζει παράδοξος, διότι κανείς σκέφτεται ως εξής: κάθε στοιχείο του $(0,1)$ ανήκει και στο $\mathbb{R}$, όμως υπάρχουν πολλά στοιχεία του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν ανήκουν στο $(0,1)$. Κατά συνέπεια, το πλήθος στοιχείων του $\mathbb{R}$ φαίνεται να είναι γνήσια μεγαλύτερο από το πλήθος στοιχείων του $(0,1)$. Αυτός ο συλλογισμός είναι σωστός, όταν όμως συγκρίνουμε δύο πεπερασμένα σύνολα, δηλαδή σύνολα που αποτελούνται από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία.

Πληθικός Αριθμός

Το πλήθος στοιχείων ενός συνόλου A θα το αποκαλούμε πληθικό αριθμό του A και παραδοσιακά θα το συμβολίζουμε με $|A|$. Αντί όμως να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό ενός συνόλου, είναι συχνά πιο αποτελεσματικό να εξετάσουμε πότε δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

Αρχικά εργαζόμαστε με πεπερασμένα σύνολα για να αποκτήσουμε μια πιο καθαρή εικόνα.

Αν υπάρχει 1-1 απεικόνιση $f : A \to B$, τότε διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B, άρα το B πρέπει να έχει τουλάχιστον όσα στοιχεία έχει το A, δηλαδή $|A| \leq |B|$. Αντίστοιχα, αν υπάρχει επί απεικόνιση $f : A \to B$, τότε η f λαμβάνει όλες τις τιμές του B, άρα το A θα πρέπει να έχει τουλάχιστον όσα στοιχεία έχει το B, δηλαδή $|B| \leq |A|$.

Έτσι, αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : A \to B$, τότε $|A| = |B|$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Με βάση τα παραπάνω, περνάμε τώρα στην περίπτωση των άπειρων συνόλων.

Λέμε ότι δύο άπειρα σύνολα A και B έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : A \to B$.

Απόδειξη

Παρατηρεί κανείς εύκολα ότι η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to (0, 1),\ f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

είναι $1 - 1$ και επί. Το συμπέρασμα έπεται.

Επίλογος

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι η πληθαριθμική έννοια του «μεγέθους» στα άπειρα σύνολα δεν συμπεριφέρεται όπως στα πεπερασμένα. Η γεωμετρική μας διαίσθηση και η πραγματικότητα μπορεί να μην συμφωνούν και γι’ αυτό η σύγκριση πληθικών αριθμών απαιτεί διαφορετικά εργαλεία.