Το παράδοξο των γενεθλίων

UniMathTutor Blog • 10 Jan 2026

Εισαγωγή

Έστω ότι μπαίνεις σε μια άιθουσα με 23 άτομα. Είναι αρκετά πιθανό κάποιοι δύο απ' αυτούς να έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα; (ίδιο μήνα και μέρα)

Οι περισσότεροι θα έλεγαν ότι η πιθανότητα είναι πολύ μικρή. Κι όμως, όπως θα δούμε η πιθανότητα ξεπερνά το 50%. Αυτό είναι το λεγόμενο "παράδοξο των γενεθλίων" και αποτελεί ένα πολύ απλό παράδειγμα όπου η διαίσθησή μας αποτυγχάνει.

Τι λένε οι πιθανότητες

Θα δουλέψουμε στη γενική περίπτωση που έχουμε n άτομα.

E : το ενδεχόμενο κάποιο ζεύγος ατόμων να έχουν ίδια μέρα γενέθλια.

E^c : το ενδεχόμενο όλοι να έχουν διαφορετικές μέρες γενέθλια.

Θα υπολογίσουμε πρώτα τη συμπληρωματική πιθανότητα $\mathbb{P}(E^c)$, γιατί είναι πιο εύκολο, και μετά θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c).$$

Για τον υπολογισμό τού $\mathbb{P}(E^c)$ σκεφτόμαστε ότι αναθέτουμε σε κάθε ένα από τα n άτομα από μια ημέρα γενεθλίων και ζητάμε την πιθανότητα όλοι να έχουν διαφορετική μέρα. Έτσι, το $\mathbb{P}(E^c)$ θα είναι ένα κλάσμα με παρονομαστή το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτή η ανάθεση χωρίς περιορισμό, δλδ 365^n (αφού για κάθε έναν έχω 365 επιλογές), και αριθμητή το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτή η ανάθεση ώστε όλοι να έχουν διαφορετική μέρα, δλδ $365.364...(365-n+1)$ (αφού για τον 1^o έχω 365 επιλογές, για τον 2^o μια λιγότερη κτλπ). Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= 1 - \frac{365.364...(365-n+1)}{365^n} \\
&= 1 - \frac{365}{365}\frac{364}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365} \\
&= 1 - \prod_{k=0}^{n-1}\frac{365-k}{365}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Πιο συγκεκριμένα

Επειδή για συγκεκριμένες τιμές τού n οι πράξεις στην (1) είναι εφιαλτικές, παρακάτω δίνουμε ένα απλό πρόγραμμα σε Python, το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα για οποιοδήποτε πλήθος ατόμων.

```
n = int(input('Give an integer n: '))

p = 1
for i in range(n):
    p *= (365-i)/365

print('The probability equals ' + str(1 - p))
```

Για $n = 23$ η πιθανίτητα είναι ≈ 0.5072.

Για $n = 45$ η πιθανότητα είναι ≈ 0.9409.

Πού βρίσκεται το «παράδοξο»;

Στα μαθηματικά δεν υπάρχει κάποιο παράδοξο. Το παράδοξο είναι ο τρόπος που πολλές φορές σκέφτεται ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Όταν ακούει κανείς το πρόβλημα, το μεταφράζει αυτόματα στο εξής ερώτημα: «ποια είναι η πιθανότητα κάποιος από την ομάδα να έχει ίδια μέρα γενέθλια με εμένα;» Αυτή όμως είναι μια εντελώς διαφορετική ερώτηση και όντως η απάντηση σε αυτό είναι περίπου 6% (σε ομάδα 23 ατόμων).

Το πραγματικό ερώτημα ήταν αν υπάρχει κάποιο ζευγάρι ατόμων μέσα στην ομάδα με ίδια ημερομηνία γέννησης.

Συχνά ο ανθρώπινος νους δυσκολεύεται να εκτιμήσει σωστά καταστάσεις στις οποίες υπάρχουν ταυτόχρονα πολλές «ευκαιρίες» για να συμβεί ένα γεγονός (στην προκειμένη περίπτωση πολλά ζευγάρια). Κάθε μεμονωμένη σύμπτωση φαίνεται απίθανη, ωστόσο η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποια σύμπτωση συνολικά είναι πολύ μεγαλύτερη απ’ όσο περιμένουμε. Αυτό το χάσμα ανάμεσα στη διαίσθηση και στον σωστό υπολογισμό είναι που δίνει στο πρόβλημα τον χαρακτηρισμό «παράδοξο».

Το πλήθος των ζευγαριών αυξάνει πολύ γρήγορα

Για να καταλάβουμε γιατί η πιθανότητα μεγαλώνει τόσο γρήγορα, πρέπει να σκεφτούμε πόσες συγκρίσεις γίνονται στ’ αλήθεια, δηλαδή πόσα ζευγάρια υπάρχουν. Σε ομάδα n ατόμων το πλήθος των ζευγαριών είναι

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των ζευγαριών δεν αυξάνεται γραμμικά συναρτήσει τού n, αλλά περίπου σαν το n^2. Για μικρά n αυτό περνά απαρατήρητο, αλλά πολύ γρήγορα γίνεται καθοριστικό. Με 10 άτομα έχουμε ήδη 45 ζευγάρια, με 20 άτομα 190 και με 23 253. Κάθε ένα από αυτά τα ζευγάρια έχει «ευκαιρία» για σύμπτωση.

Η πιθανότητα δύο συγκεκριμένα άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα είναι μικρή, ίση με $\frac{1}{365}$. Όμως όταν υπάρχουν εκατοντάδες τέτοιες ευκαιρίες (ζευγάρια), η πιθανότητα να μη συμβεί καμία σύμπτωση μειώνεται δραστικά.

Αυτός είναι και ο λόγος που το αποτέλεσμα μας ξαφνιάζει: υποτιμάμε το πόσο γρήγορα αυξάνεται το πλήθος των ζευγαριών. Το παράδοξο των γενεθλίων είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα του πώς οι τετραγωνικές αυξήσεις «ξεγελούν» τη διαίσθησή μας. Την επόμενη φορά λοιπόν που θα συναντήσεις ένα πρόβλημα Πιθανοτήτων μη βασιστείς μόνο στη διαίσθησή σου. Κάνε τούς μαθηματικούς υπολογισμούς!