Αρμονική Σειρά: Τα μερικά αθροίσματα και η λογαριθμική τους συμπεριφορά

UniMathTutor Blog • 8 Jan 2026

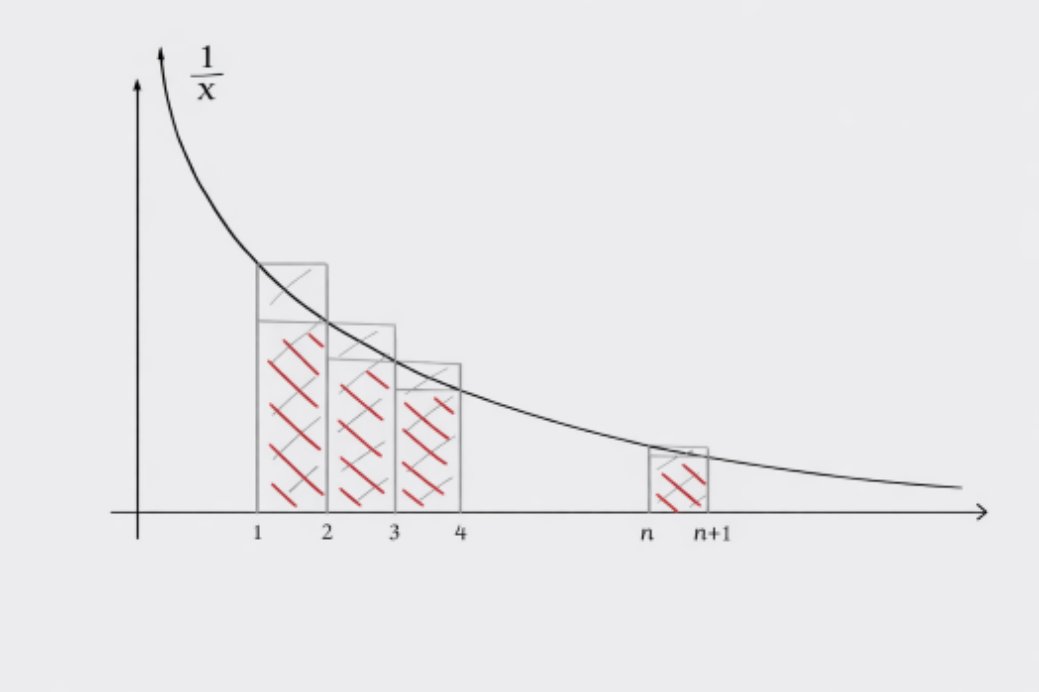
Εισαγωγή

Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποτελεί βασικό παράδειγμα στο οποίο η σειρά μιας μηδενικής ακολουθίας αποκλίνει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακολουθία $\frac{1}{n}$ πάει αργά στο 0, κάτι που αναγκάζει την ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

τής σειράς να αποκλίνει. Στο παρών άρθρο θα δείξουμε ότι η s_n συμπεριφέρεται "τελικά" (δλδ για μεγάλα n) σαν λογάριθμος (άρα αποκλίνει, αλλά πολύ αργά).

Γεωμετρική απόδειξη



Παραπάνω βλέπουμε το γράφημα τής $\frac{1}{x}$, $x > 0$. Κοιτώντας τα εμβαδά τών κόκκινων ορθογωνίων στο σχήμα παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\leq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\log(n+1), \tag{1}$$

ενώ από τα γκρί ορθογώνια παίρνουμε:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\log(n+1), \tag{2}$$

δηλαδή

$$s_{n+1}-1\leq\log(n+1)\leq s_n. \tag{3}$$

Συμπέρασμα

Η σχέση (2)

$$\log(n+1)\leq s_n$$

είναι αρκετή για να δείξουμε ότι $s_n\to+\infty$, άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, αφού $s_n\geq\log(n+1)$, όπου $\log(n+1)\to+\infty$. Ωστόσο, ο συνδυασμός των (1) και (2), δηλαδή η σχέση (3), είναι που μας εξασφαλίζει ότι s_n και λογάριθμος είναι "τελικά" συγκρίσιμες.

Σταθερά Euler-Mascheroni

Τώρα θα δώσουμε μια πιο λεπτή εκτίμηση, δείχνοντας ότι η απόσταση των ακολουθίων s_n και $\log(n)$ συγκλίνει, άρα όντως τελικά οι δύο ακολουθίες είναι περίπου ίσες. Ορίζουμε την ακολουθία των αποστάσεων

$$\gamma_n=|s_n-\log(n)|$$

και αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει. Από το προηγούμενο σχήμα είναι άμεσο ότι $s_n \geq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log(n)$, άρα $\gamma_n = s_n - \log(n)$ και για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\gamma_m - \gamma_n| &= |(s_m - \log(m)) - (s_n - \log(n))| \\
&= |(s_m - s_n) - (\log(m) - \log(n))| \\
&= |\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} - (\sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx)| \\
&= |\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx - \sum_{k=n}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx| \\
&= |\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{x})\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx + \int_m^{m+1} \frac{1}{x}\,dx| \\
&= |\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{x})\,dx - (\log(n+1) - \log(n)) + (\log(m+1) - \log(m)| \\
&= |\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{x})\,dx - \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m})| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{x})\,dx + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}) \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})\,dx + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}) \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}) \\
&\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}) \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}).
\end{aligned}$$

Τώρα, αφού $\frac{1}{n+1} + \log(\frac{n+1}{n}) \to 0$ καθώς $n \to +\infty$, υπάρχει n_0 τ.ω. $n \geq n_0 \implies \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n+1}{n}) < \frac{\epsilon}{2}$ και αφού $\log(\frac{m+1}{m}) \to 0$ καθώς $m \to +\infty$, υπάχει m_0 τ.ω. $m \geq m_0 \implies \log(\frac{m+1}{m}) < \frac{\epsilon}{2}$. Επομένως, για κάθε $m > n \geq \max\{n_0, m_0\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\gamma_m - \gamma_n| &\leq \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n+1}{n}) + \log(\frac{m+1}{m}) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Το όριο τής γ_n παραδοσιακά συμβολίζεται με γ και είναι η λεγόμενη σταθερά Euler-Mascheroni.