La dualité de Poincaré et la cohomologie à support compact

J'ignore • 20 Nov 2025

Si $f : U \to X$ est une immersion ouverte, alors le foncteur $f_!$ est exactement l'extension par zéro. Plus Pour un morphisme f compactifiable, on peut définir $f_!$ par réduction au cas d'une immersion ouverte. Sur le site étale, $j_!$ ne préserve pas les objets injectifs en général, alors $Rf_! \ncong R\overline{f}_* \circ j_!$. Voir l'exemple 2.1 pour les détails. On prend le membre de droite comme définition de $Rf_!$.

L'excision est toujours valable pour $Rf_!$, ce qui découle de la suite exacte courte suivante :

$$0 \to j_! j^* \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F} \to 0$$

(regarde le germe)

Pour un morphisme propre f est un faisceau $\mathcal{F}$ constructible, les faisceaux $R^i f_* \mathcal{F}$ sont constructibles. Voir la section 17, p. 117 de cet article pour une discussion de la difficulté derrière ce résultat.

On peut définir la cohomologie à support dans un sous-schéma fermé Z comme les foncteurs dérivés de $\Gamma_Z(X, -) := ker(\Gamma(X, -) \to \Gamma(U, -))$ $(U = X \setminus Z)$ puisque ce foncteur est exact à gauche. Malheureusement, $H^i_c(X, -)$ n'est pas égal à $\varinjlim_Z H^r_Z(X, -)$ où Z parcourt les sous-schémas fermés complets de X (Voir la proposition 18.3 de l'article de Milne).

On peut exprimer les foncteurs dérivés $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ comme $\mathrm{Ext}^i_{et}(i_* i^* \underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$. Il en induit une suite exacte longue :
$H^i_Z(X, -) \to H^i(X, -) \to H^i(U, -) \to H^{i+1}_Z(X, -) \to \ldots$

Pour la définition du morphisme de trace, voir la section 1.3.8 de cette note de Brian Conrad (En particulier, voir le théorème 1.3.8.1 pour la formulation de la dualité de Poincaré). On a besoin du faisceau d'orientation pour le définir. Pour une variété lisse complexe de dimension d, le faisceau d'orientation étale est $\mu_n^{\otimes d}$.

On peut réécrire la dualité de Poincaré de la façon suivante : $Rf_!$ et $Rf^!$ forment une paire de foncteurs adjoints. C'est l'énoncé de la dualité de Verdier. Le faisceau canonique doit être considéré comme le faisceau d'orientation dans la dualité de Serre, l'analogue de la dualité de Poincaré pour les faisceaux cohérents.

Soit X une variété lisse de dimension d sur k, et ℓ un nombre premier inversible dans k. Le morphisme de trace donne un isomorphisme $f^!\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$. Les adjonctions entre f^* et f_*, d'une part, et entre $(R)f_!$ et $(R)f^!$, d'autre part, impliquent que $H^i_c(X)^* \cong \mathrm{Hom}(f_!f^*\mathbb{Q}_\ell[n], \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell, f_*f^!\mathbb{Q}_\ell[-n])$, alors

$$H^n_c(X;\mathbb{Q}_\ell)^* \cong H^{2d-n}(X;\mathbb{Q}(d))$$

.

Pour la démonstration, on se ramène au cas des courbes propres et lisses. De plus, on peut déformer une courbe en caractéristique zéro, et grâce au théorème de changement de base pour les morphismes propres et lisses, on peut se restreindre au cas de la caractéristique zéro et utiliser la méthode transcendantale.

Référence :

https://math.stanford.edu/~conrad/Weil2seminar/Notes/L10.pdf

https://math.stanford.edu/~conrad/Weil2seminar/Notes/L12-13.pdf (Tony Feng)

https://math.stanford.edu/~conrad/Weil2seminar/Notes/etnotes.pdf

https://www.math.stonybrook.edu/~kamenova/homepage_files/Hartshorne_engl.pdf (Voir la section 6 du chapitre 3 pour la formulation en termes de Ext)