faisceaux constructibles

J'ignore • 3 Oct 2025

On dispose de l'équivalence de catégories fondamentale suivante :

Le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ est une équivalence entre la catégorie des schémas étales finis sur S et celle des faisceaux lcc (localement constants constructibles) sur S.

L'intuition provient de la théorie topologique des revêtements. Voir ici pour la démonstration. Plus généralement, on considère les faisceaux constructibles. Ils sont localement constants constructibles sur chaque composante d'une certaine stratification. On a le résultat fondamental suivant les concernant (théorème 1.7 de l'article ci-dessus) :

- i. Un objet de Et(S) est noethérien (c'est-à-dire que ses sous-objets satisfont la condition de chaîne ascendante) si et seulement s'il est constructible. Par conséquent, les sous-faisceaux d'un faisceau constructible sont constructibles. Il en va de même parmi les faisceaux abéliens de torsion.
- ii. Tout $F \in Et(S)$ est la limite directe filtrante de ses sous-faisceaux constructibles.
- iii. Si chaque section d'un $F \in Ab(S)$ est localement annulée par un entier non nul, alors F est la limite directe de ses sous-faisceaux abéliens constructibles.

Ce résultat nous permet souvent de nous réduire au cas des faisceaux constructibles.

L'henselization stricte : C'est la version étale de l'anneau local. L'hensélisation (stricte) est préférable au complété en ce qui concerne la platitude. Le morphisme $R \to R^h \to R^{sh}$ est toujours plat (car R^h et R^{sh} sont les limites directe des R-algèbres plates, voir ici), tandis que $R \to \widehat{R}$ ne l'est pas en général lorsque R n'est pas noethérien (Voir ici pour un contre-exemple.)

Groupe fondamental étale : C'est une généralisation en dimension supérieure du groupe de Galois absolu, et aussi l'analogue algébro-géométrique du groupe fondamental en topologie. En poursuivant l'équivalence de catégories précédente, on a le résultat suivante :

La catégorie des revêtements étales finis d'un S-schéma X est équivalente à la catégorie des ensembles finis munis d'une action de $\pi_1(X, \overline{x})$.

La théorie de la cohomologie étale : Puisque la catégorie Ab(S) a suffisamment d'injectifs, on peut définir le foncteur dérivé Rf_* à droite du foncteur f_* qui est exact à gauche. Notons que Rf_* est un foncteur au niveau des schémas. Plus précisément, si $f: X \to Y$ est un morphisme et si \mathcal{F} est un faisceau sur Y, on a une application $H^0(Y,\mathcal{F}) \to H^0(X,f^*\mathcal{F})$. Comme f^* est exacte, il se prolonge en une application entre les δ -foncteurs $H^i(Y,\mathcal{F}) \to H^i(X,f^*\mathcal{F})$.

Comme dans le cas de la topologie de Zariski, chaque carré commutatif cidessous induit une application canonique de changement de base $g^*Rf_* \to R(f')_*(g')^*$ en vertu de l'unité ou coünité de l'adjonction entre f_* et f^* (Voir ici pour la version de cette application dans la catégorie derivée). Dans le bon cas, c'est un isomorphisme.

Enfin, on mentionne l'interpretation de $H^1(X, \mathcal{F})$ comme torseur (au sens faisceautique) sur X. C'est à cause de la suite spectrale de Čech–Grothendieck $\check{H}^p(X,\mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathcal{F})$ (voir ici pour la démonstration; Essentiellement, on réécrit le foncteur $\Gamma: Sh \to Ab$ comme $Sh \to PSh \to Ab$ où $Sh \to PSh$ désigne le foncteur d'oubli). Si \mathcal{F} est un faisceau G étale abélien fini, on peut applique l'équivalence des catégories ci-dessus et conclure $H^1_{et}(X,G) \cong H^1(\pi_1(X,\overline{x}),G_x)$. Mais quand G n'est pas fini, ce n'est pas vrai en général. Par exemple, si X est la courbe cubique nodale et si $G = \mathbb{Z}$, on a $H^1(X,G) \neq 0$ car X admet un torseur fibré en \mathbb{Z} obtenu par recollement d'une infinité de \mathbb{P}^1 . Mais $H^1(\pi_1(X,\overline{x}),\mathbb{Z}) = Hom_{cont}(\pi_1(X,\overline{x}),\mathbb{Z}) = 0$ parce que $\pi_1(X, \overline{x})$ est pro-fini. En revanche, si X est connexe, noethérien et normal, tout faisceau étale localement constant F (pas nécessairement fini) sur X est scindé par un recouvrement étale fini. Cela se reduit à la surjectivité de la application $\pi_1(\eta, \overline{\eta}) \to \pi_1(X, \overline{\eta})$ où η est la point générique de X, ce qui, à son tour, se reduit au fait que les schémas connexes, noethériens et normaux sont irréductibles (voir ici pour la démonstration en utilisant l'algèbre commutative). Notons que la normalité est cruciale ; par exemple, X = Spec(k[x,y]/(xy)) est un contre-exemple. (X n'est pas normal parce que $\frac{x}{x-y}$ est un idempotent non trivial dans la anneau total des fractions de k[x,y]/(xy).) Pour un exemple plus extrême où le torseur n'est pas répresentable, voir ici.