

faisceaux constructibles

J'ignore • 3 Oct 2025

On dispose de l'équivalence de catégories fondamentale suivante :

Le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ est une équivalence entre la catégorie des schémas étales finis sur S et celle des faisceaux lcc (localement constants constructibles) sur S .

L'intuition provient de la théorie topologique des revêtements. Voir [ici](#) pour la démonstration. Plus généralement, on considère les faisceaux constructibles. Ils sont localement constants constructibles sur chaque composante d'une certaine stratification. On a le résultat fondamental suivant les concernant (théorème 1.7 de l'article ci-dessus) :

- i. Un objet de $Et(S)$ est noethérien (c'est-à-dire que ses sous-objets satisfont la condition de chaîne ascendante) si et seulement s'il est constructible. Par conséquent, les sous-faisceaux d'un faisceau constructible sont constructibles. Il en va de même parmi les faisceaux abéliens de torsion.
- ii. Tout $F \in Et(S)$ est la limite directe filtrante de ses sous-faisceaux constructibles.
- iii. Si chaque section d'un $F \in Ab(S)$ est localement annulée par un entier non nul, alors F est la limite directe de ses sous-faisceaux abéliens constructibles.

Ce résultat nous permet souvent de nous réduire au cas des faisceaux constructibles.

L'henselization stricte : C'est la version étale de l'anneau local. L'hensélisation (stricte) est préférable au complété en ce qui concerne la platitude. Le morphisme $R \rightarrow R^h \rightarrow R^{sh}$ est toujours plat (car R^h et R^{sh} sont les limites directes des R -algèbres plates, voir [ici](#)), tandis que $R \rightarrow \widehat{R}$ ne l'est pas en général lorsque R n'est pas noethérien (Voir [ici](#) pour un contre-exemple.)

Groupe fondamental étale : C'est une généralisation en dimension supérieure du groupe de Galois absolu, et aussi l'analogue algébro-géométrique du groupe fondamental en topologie. En poursuivant l'équivalence de catégories précédente, on a le résultat suivante :

La catégorie des revêtements étales finis d'un S -schéma X est équivalente à la catégorie des ensembles finis munis d'une action de $\pi_1(X, \bar{x})$.

La théorie de la cohomologie étale : Puisque la catégorie $Ab(S)$ a suffisamment d'injectifs, on peut définir le foncteur dérivé Rf_* à droite du foncteur f_* qui est exact à gauche. Notons que Rf_* est un foncteur au niveau des schémas. Plus précisément, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y , on a une application $H^0(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{F})$. Comme f^* est exacte, il se prolonge en une application entre les δ -foncteurs $H^i(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, f^*\mathcal{F})$.

Comme dans le cas de la topologie de Zariski, chaque carré commutatif ci-dessous induit une application canonique de changement de base

$g^*Rf_* \rightarrow R(f')_*(g')^*$ en vertu de l'unité ou coïté de l'adjonction entre f_* et f^* (Voir ici pour la version de cette application dans la catégorie dérivée). Dans le bon cas, c'est un isomorphisme.

Enfin, on mentionne l'interprétation de $H^1(X, \mathcal{F})$ comme torseur (au sens faisceutique) sur X . C'est à cause de la suite spectrale de Čech–Grothendieck $\check{H}^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$ (voir ici pour la démonstration; Essentiellement, on réécrit le foncteur $\Gamma : Sh \rightarrow Ab$ comme $Sh \rightarrow PSh \rightarrow Ab$ où $Sh \rightarrow PSh$ désigne le foncteur d'oubli). Si $\mathcal{F}$ est un faisceau G étale abélien fini, on peut appliquer l'équivalence des catégories ci-dessus et conclure

$H_{\text{ét}}^1(X, G) \cong H^1(\pi_1(X, \bar{x}), G_x)$. Mais quand G n'est pas fini, ce n'est pas vrai en général. Par exemple, si X est la courbe cubique nodale et si $G = \mathbb{Z}$, on a $H^1(X, G) \neq 0$ car X admet un torseur fibré en $\mathbb{Z}$ obtenu par recollement d'une infinité de $\mathbb{P}^1$. Mais $H^1(\pi_1(X, \bar{x}), \mathbb{Z}) = Hom_{cont}(\pi_1(X, \bar{x}), \mathbb{Z}) = 0$ parce que $\pi_1(X, \bar{x})$ est pro-fini. En revanche, si X est connexe, noethérien et normal, tout faisceau étale localement constant F (pas nécessairement fini) sur X est scindé par un recouvrement étale fini. Cela se réduit à la surjectivité de la application $\pi_1(\eta, \bar{\eta}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\eta})$ où η est la point générique de X , ce qui, à son tour, se réduit au fait que les schémas connexes, noethériens et normaux sont irréductibles (voir ici pour la démonstration en utilisant l'algèbre commutative). Notons que la normalité est cruciale ; par exemple, $X = Spec(k[x, y]/(xy))$ est

un contre-exemple. (X n'est pas normal parce que $\frac{x}{x-y}$ est un idempotent non trivial dans la anneau total des fractions de $k[x, y]/(xy)$.) Pour un exemple plus extrême où le torseur n'est pas représentable, voir [ici](#).