Des théories de cohomologie de Weil

J'ignore • 25 Sep 2025

Fixons un corps algébriquement clos k (le corps de base) et un corps F de caractéristique 0 (le corps des coefficients). Une théorie de cohomologie de Weil consiste en les données suivantes :

1. Un foncteur contravariant H^* de la catégorie des variétés projectives lisses vers la catégorie des F-algèbres graduées commutatives.
2. Pour toute variété X projective lisse, on a un homomorphisme de groupes $\gamma : CH^i(X) \to H^{2i}(X)$ (Pour la définition de $CH(X)$ voir ici).
3. Pour toute variété X projective lisse de dimension d, on a un l'application trace $\int_X : H^{2d}(X) \to F$.

satisfaisant les axiomes suivants

1. La dualité de Poincaré (C'est équivalent à la forme usuelle de la dualité de Poincaré, compte tenu de l'égalité $H_i(X) = H^i(X)^*$ lorsque X est projective.);
2. La formule de Künneth ;
3. La compatibilité de l'application classe de cycle γ avec f^*, f_*, le produit extérieur et on normalise $\int_{Spec(k)} \gamma([Speck]) = 1$;

Voici une formule importante suivante pour $\gamma([X]) \in H^{2d}(X \times X) \cong \oplus_i H^i(X) \otimes H^{2d-i}(X)$, déduite des axiomes d'une théorie de cohomologie de Weil.

> (Lemma 45.7.7) Choose a basis $e_{i,j}, j = 1, ..., \beta_i$ of $H^i(X)$ over F. Write
>
> $$\gamma([\Delta]) = \sum_{i=0,...,2d} \sum_j e_{i,j} \otimes e'_{2d-i,j}$$
>
> with $e'_{2d-i,j} \in H^{2d-i}(X)$. Then $\int_X e_{i,j} \cup e'_{2d-i,j'} = (-1)^i \delta_{jj'}$.

On en déduit le théorème des points fixes de Lefschetz :

> $\sum_{i=0,\ldots,2\dim(X)}(-1)^i \dim_F H^i(X) = \deg([\Delta]\cdot[\Delta]).$

Le théorème 45.7.11 de Stack project concerne la relation entre les théories de cohomologie de Weil et les motifs. Il affirme qu'une théorie de cohomologie de Weil est la même chose qu'un foncteur de la catégorie des motifs vers celle des espaces vectoriels gradués, satisfaisant certaines conditions. Ainsi, la théorie des motifs peut être considérée comme une théorie de cohomologie universelle.

Référence :

https://stacks.math.columbia.edu/tag/0FGS,

https://en.wikipedia.org/wiki/Weil_cohomology_theory,

https://dfoiler.github.io/handouts/one-offs/etale.pdf

https://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Weil2seminar/Notes/L1.pdf