La fonction zêta d'un schéma sur un corps fini

J'ignore • 22 Sep 2025

Définissons la fonction zêta d'un schéma X sur $\mathbb{F}_q$ comme suit:

$$\zeta_X(s) := \prod_{x \text{ closed point}} (1 - (Nx)^{-s})^{-1}.$$

Cela ressemble au cas des corps de nombres. On peut faire un changement de variable

$$Z_X(T) = \prod_{x \text{ closed point}} (1 - T^{\deg(x)})^{-1}.$$

Alors $\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$ et $Z_X(T) \in \mathbb{Q}[[T]]$. La fonction zêta $Z_X(T)$ est toujours une fonction rationnelle, i.e. $Z_X(T) \in \mathbb{Q}(T)$ (même si X n'est pas lisse ni projectif, voir ici).

Pour exemple, si $X = \mathbb{P}^1$, on a

$$\begin{aligned} Z_X(T) &= \prod_{f \in \mathbb{F}_q[T] \text{ monic irreducible}} (1 - T^{\deg(f)})^{-1} \\ &= \prod_{d \geq 1} \prod_{f \in \mathbb{F}_q[T] \text{ monic irreducible } \deg(f) = d} (1 - T^d)^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{d \geq 1} \psi(d) \sum_{k \geq 1} \frac{T^{kd}}{k}\right) \end{aligned}$$

si l'on note $\psi(d)$ le nombre de polynômes moniques irréductibles de degré d. Remarquons que nous avons l'identité suivante :

$$q^n = \sum_{d \mid n} d\psi(d)$$

On en déduit que

$$Z_X(T) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{T^n}{n} \sum_{d \mid n} d\psi(d)\right) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(qT)^n}{n}\right) = \frac{1}{1 - qT}$$

Le même calcul montre pour toute variété X, on peut réécrire

$$Z_X(T) = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{T^n}{n}\sum_{d|n} d\cdot \#X_d\right)$$

si l'on note $X_d = \{x \in X : x \text{ closed point }, \deg(x) = d\}$. Remarquons $\prod_{d|n} d\cdot \#X_d$ n'est autre que le nombre de points de X définis sur $\mathbb{F}_{q^n}$, i.e. $\#X(\mathbb{F}_{q^n})$. On l'appelle aussi la fonction zêta de Hasse–Weil de X.

Pour une motivation plus complète des conjectures de Weil, voir cette note.