

revenir sur GAGA

J'ignore • 14 Sep 2025

Voir Hartshorne, Algebraic Geometry, 1977, Appendice B.1 et B.2, pour une introduction aux espaces analytiques complexes et à l'analytification. Notons $X \mapsto X^{an}$ le foncteur d'analytification. Considérons les cinq questions suivantes :

1. Soit $\mathcal{X}$ un espace analytique complexe, existe-t-il un schéma X tel que $X^{an} \cong \mathcal{X}$?
2. Si X et X' sont deux schémas tels que $X^{an} \cong X'^{an}$, sont-ils nécessairement isomorphes ?
3. Soit X un schéma et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X^{an} , existe-t-il un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X tel que $\mathcal{F}^{an} \cong \mathcal{F}$?
4. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux faisceaux cohérents tels que $\mathcal{F}^{an} \cong \mathcal{F}'^{an}$, sont-ils nécessairement isomorphes ?
5. Soit X un schéma et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent. Les applications $\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$ sont-elles nécessairement des isomorphismes ?

La réponse à ces questions est en général négative, mais elle est vraie dans le cas des variétés projectives. Ceci a été démontré par Serre dans son célèbre article GAGA (Voir [ici](#) pour un aperçu de cet article.) En particulier, Serre a obtenu une nouvelle démonstration du théorème de Chow :

Soit $\mathcal{X}$ un sous-espace analytique compact de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Il existe un sous-schéma $X \subseteq \mathbb{P}^n$ tel que $X^{an} = \mathcal{X}$.

Une autre question est : quand une variété complexe compacte est-elle projective algébrique ? En dimension 1, la réponse est toujours positive. Une première étape consiste à établir l'existence d'une fonction méromorphe non constante. C'est de l'analyse dure. La deuxième étape est souvent appelée le "théorème d'existence de Riemann". Pour une référence à ce sujet, voir SGA I, Exp. XII. La partie difficile consiste à démontrer l'essentielle surjectivité. L'idée de Grothendieck est que l'on peut se ramener au cas régulier ; grâce à la résolution

des singularités, on obtient une compactification régulière, puis on peut prolonger notre revêtement analytique étale fini à la compactification, sur laquelle on peut appliquer GAGA.

Il existe deux variétés algébriques non isomorphes dont les analytifications sont isomorphes. Voir ici pour [le détail](#).