# Le théorème de Serre sur les variétés kählériennes (analogue des conjectures de Weil dans le cas complexe)

J'ignore • 4 Sep 2025

## Le théorème de Serre sur les variétés kählériennes

> Soient $X$ une variété complexe lisse et projective, $[H] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ une classe d'hyperplan et $F : X \to X$ morphisme holomorphe tel que $F^*[H] = q[H]$ pour certain $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Alors les valeurs propres de $F^*$ sur $H^i(X, \mathbb{C})$ sont de valeur absolue $q^{i/2}$.

Pour la démonstration, on a besoin de quelques faits. Le premier fait est le théorème de Lefschetz vache, qui dit que

$$H^{i+2}(X, \mathbb{C}) \cong L(H^i(X, \mathbb{C})) \oplus H^{i+2}_{prim}(X, \mathbb{C}),$$

où $L : H^i \to H^{i+2}$ est defini par $\alpha \mapsto \alpha \cup [H]$, et on a la décomposition suivante

$$H^i_{prim} = \oplus_{p+q=i} H^{p,q}_{prim}.$$

Le second fait est le théorème de l'indice de Hodge, qui affirme que l'accouplement sur $H^k(X)_{prim}$ donné par

$$\langle \alpha, \beta \rangle := i^k \int_X \alpha \wedge \overline{\beta} \wedge [H]^{n-k}$$

est definit (positif ou négatif) sur chaque sous-espace $H^{p,q}_{prim}$. Nous pouvons maintenant donner la démonstration :

Par récurrence sur $i$, il suffit de démontrer cela sur le sous-espace $H^i_{prim}$. Nous pouvons en outre nous restreindre au sous-espace $H^{p,q}_{prim}$. Soit $\alpha \in H^{p,q}_{prim}$ un vecteur propre de $F^*$ associé à la valeur propre $\lambda$. Le calcul clé est le suivant

$$
\begin{aligned}
|\lambda|^2\langle\alpha,\alpha\rangle &= \langle F^*\alpha, F^*\alpha\rangle \\
&= i^k \int F^*\alpha \wedge F^*\overline{\alpha} \wedge [H]^{n-k} \\
&= \frac{i^k}{q^{n-k}} \int F^*(\alpha \wedge \overline{\alpha} \wedge [H]^{n-k}) \\
&= \frac{q^n i^k}{q^{n-k}} \int \alpha \wedge \overline{\alpha} \wedge [H]^{n-k} \\
&= q^k \langle\alpha,\alpha\rangle
\end{aligned}
$$

où la 4e inégalité est vraie car $F^*$ agit sur $H^{2n}(X,\mathbb{C})$ par multiplication par $q^n$ (L'espace $H^{2n}(X,\mathbb{C})$ est de dimension 1, engendré par la classe $[H]^n$).

L'essentiel est que l'existence de certaines structures sur les groupes cohomologiques suffit à démontrer l'hypothèse de Riemann. La difficulté réside dans le fait que la décomposition de Hodge et le théorème de l'indice de Hodge ne sont pas disponibles pour les variétés sur un corps fini.

Voir ici et ici pour une discussion de ce resultat.