

Le théorème de l'indice de Hodge : le cas du corps des nombres complexes

J'ignore · 30 Aug 2025

Supposons que S soit une surface complexe lisse et projective. Il existe alors un accouplement $\text{Pic}(S) \times \text{Pic}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ donné par

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' := \int_S c_1(\mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{L}').$$

où $c_1(\mathcal{L})$ désigne la classe de Chern du faisceau inversible \mathcal{L} (qui est aussi égale à la duale de Poincaré de la classe fondamentale du diviseur de Weil correspondant. Voir [ce site](#) pour référence.)

On observe la première classe de Chern prend ses valeurs dans $H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \subseteq H^2(S, \mathbb{C})$. Inversement, toute classe dans $H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ provient d'un faisceau inversible holomorphe. (Pour voir cela, considérons la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^\times \rightarrow 0$ et la suite exacte longue qui en provient. On peut utiliser la décomposition de Hodge.)

Le théorème de l'indice de Hodge se déduit alors facilement de la géométrie de Kähler :

Soit S une surface complexe projective, et soit $\omega \in H^2(S, \mathbb{Z})$ la classe d'un faisceau inversible ample. Alors l'accouplement d'intersection est défini négatif sur $\omega^\perp \subseteq H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \cap H^2(S, \mathbb{R})$.

Voir la section 6.3.2 du volume I de Voisin, *Théorie de Hodge*, pour référence. En corollaire, un faisceau inversible (L) est numériquement équivalent à zéro si et seulement si $c_1(L) = 0$. On en déduit que c_1 définit une inclusion naturelle $\text{Num}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \subseteq H^{1,1}(S, \mathbb{C})$ où $\text{Num}(S) := \text{Pic}(S) / \sim_{\text{num}}$. En particulier, $\text{Num}(S)$ est un groupe abélien de type fini. C'est un cas particulier du [théorème de la base](#).