Le théorème de l'indice de Hodge : le cas du corps des nombres complexes

J'ignore • 30 Aug 2025

Supposons que S soit une surface complexe lisse et projective. Il existe alors un accouplement $Pic(S) \times Pic(S) \to \mathbb{Z}$ donné par

$$\mathcal{L}.\mathcal{L}' := \int_S c_1(\mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{L}').$$

où $c_1(\mathcal{L})$ designe la classe de Chern du faisceau inversible $\mathcal{L}$ (qui est aussi égale à la duale de Poincaré de la classe fondamentale du diviseur de Weil correspondant. Voir ce site pour référence.)

On observe la première classe de Chern prend ses valeurs dans $H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \subseteq H^2(S, \mathbb{C})$. Inversement, toute classe dans $H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ provient d'un faisceau inversible holomorphe. (Pour voir cela, considérons la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S^\times \to 0$ et la suite exacte longue qui en provient. On peut utiliser la décomposition de Hodge.)

Le théorème de l'indice de Hodge se déduit alors facilement de la géométrie de Kähler :

> Soit S une surface complexe projective, et soit $\omega \in H^2(S, \mathbb{Z})$ la classe d'un faisceau inversible ample. Alors l'accouplement d'intersection est défini negatif sur $\omega^\perp \subseteq H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \cap H^2(S, \mathbb{R})$.

Voir la section 6.3.2 du volume I de Voisin, *Théorie de Hodge*, pour référence. En corollaire, une faisceau inversible (L) est numériquement équivalent à zéro si et seulement si $c_1(\mathcal{L}) = 0$. On en déduit que c_1 definit une inclusion naturelle $\mathrm{Num}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \subseteq H^{1,1}(\mathbb{C})$ où $\mathrm{Num}(S) := \mathrm{Pic}(S)/\sim_{num}$. En particulier, $\mathrm{Num}(S)$ est un groupe abélien de type fini. C'est un cas particulier du théorème de la base.