La conjecture de Weil

J'ignore • 28 Aug 2025

La conjecture de Weil

> i. Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Il existe $\alpha_1, ...\alpha_r, \beta_1, ...\beta_s \in \overline{\mathbb{Z}}$ tels que
> $$\#X(\mathbb{F}_{q^n}) = \alpha_1^n + ...\alpha_r^n - \beta_1^n - ... - \beta_s^n.$$
> pour tout $n \geq 1$.
> ii. Soit X une variété propre et lisse de dimension d sur $\mathbb{F}_q$. On peut regrouper les termes de l'expression précédente selon leur valeur absolue, comme suit :
> $$\#X(\mathbb{F}_{q^n}) = \sum_{j=1}^{b_0} \alpha_{0j}^n - \sum_{j=1}^{b_1} \alpha_{1j}^n + ... + \sum_{j=1}^{b_{2d}} \alpha_{2d,j}^n.$$
> où
>
> a. les b_j sont les nombres de Betti ℓ-adique, et ils satisfont la relation $b_{2d-i} = b_i$;
> b. les $\alpha_{i,j} \in \overline{\mathbb{Z}}$ satisfont la relation $\alpha_{2d-i,*} = q^d/\alpha_{i,*}$ après un certain réordonnancement ;
> c. (l'hypothèse de Riemann pour les variétés sur les corps finis) $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ pour tout i, j, et toute valeur absolue archimédienne du corps $\mathbb{Q}(\alpha_{ij})$;
> d. si X est de plus géométriquement irréductible, alors $b_0 = 1, b_{2d} = 1$ et $\alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$.
>
> iii. Soit X un schéma propre et lisse sur un sous-anneau de type finie du corps $\mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R, alors $R/\mathfrak{m}$ est un corps fini, et la réduction $X_{R/\mathfrak{m}}$ est un schéma propre et lisse sur $R/\mathfrak{m}$. Ainsi, pour $i = 0, ..., 2d$, les b_i dans (ii) sont égaux au rang de $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

Dans le cas des courbes, l'énoncé (ii)(c) se réduit au théorème de l'indice de Hodge (Voir cet article de blog pour une discussion de ce théorème.) Essentiellement, ce théorème implique l'inégalité de Castelnuovo-Severi : si $V = C_1 \times C_2$ est le produit de deux courbes et D un diviseur, alors

$(D^2) \leq 2d_1d_2$ où $d_i := (D \cdot C_i)$. (Notons la ressemblance avec'inégalité de Cauchy–Schwarz.) Notons $\mathrm{Def}(D)$ la différence $2d_1d_2 - (D^2) \geq 0$. En utilisant l'astuce de la puissance tensorielle, on obtient le corollaire suivant :

> Soient D, D' deux diviseurs sur V. Alors
> $$|(D \cdot D') - d_1d_2' - d_1'd_2| \leq \sqrt{\mathrm{Def}(D)\mathrm{Def}(D')}.$$

On en déduit facilement la borne de Hasse-Weil en remplaçant $D := \Delta, D' := \Gamma_F$ où Γ_F est le graphe du morphisme de Frobenius $F : C \to C$, qui dit que le nombre N des points rationnels sur une courbe $C/\mathbb{F}_q$ satisfait l'inégalité suivante :

$$|N - q - 1| \leq 2g\sqrt{q}.$$

où g est le genre de C. Cela implique l'hypothèse de Riemann dans le cas des courbes grâce à la fonction zêta. Voir la section 4.2 de l'article pour les détails.

On peut utiliser (iii) pour détecter si un schéma admet un revêtement par une variété lisse et propre en caractéristique zéro (voir ici).

Références : Poonen, Rational points on varieties, chapitre 7 jusqu'à la section 7.5.1 ; Milne, The Riemann Hypothesis over Finite Fields: from Weil to the present day, pages 8–10.