《初等组合最优化论》第1章 基本概念与初等方法一注记; 2016年11月

秦裕瑗 · 10 Aug 2025

1.11 几点注记

多项式算法有较好的"封闭性",即几个多项式算法可以结合起来解同一个实例的某些特殊情形。一个多项式算法可以利用另一个多项式算法作为其"子程序",并且最后的结果仍是一个多项式算法。

经验表明,对于大多数问题而言,一旦找到了多项式算法,那么经过研究者的努力,很快就会发现新的多项式算法,对比两种算法实际所用的时间,从理论上讲相当于降低了多项式的阶数,并且常常可以降到3次甚至更低。相反,指数算法,如果有同次数的两个算法,还要讨论最高次数的系数的大小,以区别算法的优劣。而在比较多项式型和指数型的算法时,一般对多项式的次数不再细分。

一旦找到了多项式算法,那么所论实例的一切指数型算法很快就会被抛弃。

本书将讨论若干个多项式问题,但是不为追求阶数细微减小的算法而占用太多的篇幅。可能那些阶数更低的多项式算法的出现有其自身的理由,除非是另一个思路所得的产物,只是为了编写本书的初衷"去小知而大知明,汇众知以明其道"不顾及这方面的工作了。

本书的目的在于把组合最优化这门数学分支的基础部分作一番整理,对有些概念、 术语和方法给以明确的界定。有的和某些著作的见解不尽相同。

第一点,关于学科的定义:每门学科以及属于该学科的各种概念都有各自的定义。由于历史发展的阶段不同,人们认识事物的侧面不同,甚至个人的偏好不同,同一个学科或概念,有几种不同的定义是常见的事。选定其中的一个,有时相比于别的定义,会被认为有片面性。但是,这样做,比不加定义要好。

本来我们已经有了组合数学的定义,例如,[孙 1]中提到:"组合数学研究的对象泛称格局。所谓格局包括图、设计、算法过程、数学系统、工作程序等。"因此也可以把组合最优化定义为研究、求解最优格局问题的学问。

又有学者说:"组合最优化是通过对数学方法的研究去寻找离散事件的最优编排、分组、次序或筛选等。"

更有学者说:"在组合(最优化)问题里,是从一个无限集或者可数无限集里寻找一个对象——典型地是一个整数,一个集合,一个排列,或者一个图。"

[林 11]中讲得更为广阔而清楚:"亦称离散最优化(discrete optimization),它是组合数学(离散性数学)与最优化理论的交叉学科,研究对象是各种组合构形的最优化问题。所谓组合构形是指有限个事物的配置方式,包括集合选取、位置安排、连接结构、作业布局、资源分配以及排序、划分、装填、覆盖、染色等。概括地说,有一个基础集 X 表示事物之集和一个状态集 Y 表示事物呈现的状态(如位置、颜色、标号);一个组合构形就定义为从 X 到 Y 的映射

$$f: X \to Y$$

表示每一个元素处于一个状态,构成一种配置方式。一种组合构形的优劣往往用它的某个参数 v 来衡量,如某种特定元素的个数或权重,或时间、长度、费用等性能指标。组合最优化问题的一般形式是求一个满足一定条件的组合构形 f,使其目标参数 v 达到最大(小)值。"

它们都比定义1.1要宽得多。

给一个学科下定义, 往往要求这个定义最好能够清楚地界定讨论的范围涵盖众多的、熟知的、公认应属于此的问题, 还要求理论研究和算法发现时,这个定义本身更易于操作, 更具有一定的构造性。

像组合最优化,其诞生不久,正处于发展阶段,今日选择了一个定义, 只是立此照存, 便于探讨问题。将来随着出现众多新的题目,积累大量新的研究和应用成果,产生了新的思路,会产生新的定义。这该是科学发展中正常规律的事。《礼记》有一句话:"止,而后能观"。确定定义是研究学问的一种科学方法。

我们之所以宁愿采用定义 1.1 作为编写本书的一个出发点,一是许多著名学者采用这个定义,二是定义具有有限性、可操作性和子集型,它和几个子集型最优化原理能够配伍,开展工作。当然这样的定义与上述学者的定义相比要狭窄得多,譬如例 1.7 的 Steiner 树问题就不在本书范围之内。

第二点,关于求解题目的工具问题:组合最优化问题的一个数字例,如果它的规模很小,往往仅靠纸上笔算,无须理论也能得到答案。大量的生产实际任务,归结为某个问题的实例,其规模往往是巨大的,而理论的研究更是注意一般性,也是以大规模为前提的。如何合理组织有关数据,更易于获得题目的理论和答案,发现新的推理和计算工具是有积极意义的。一般而言,有两个方面:一种是或者从数学宝库中发现合用的工具,或者发现崭新的数学系统;另一种是有效地编制各种程序,甚至软件包,让计算机进行计算。

第三点,关于术语的使用:人们常常把某些生活和工程名词转化为自己学科的专业术语,给出明确的定义,有时甚至和本学科的有些论著也不一致。例如,问题、方法和算法等;又如,树、路等。但是,在一般讨论或行文时又很难进一步严格区分。请读者注意上下文和严格的定义,以区分它们的实际意义。

科学成就的重要性往往并不只是表现为在已有的材料上添加新东西,对于科学的进步来说,使已有的但是烦难的研究领域条理化、简单化和明确化,这样一种探讨绝不是次要的。通过这样的探讨,有助于(或至少有可能)从整体上来观察、理解和把握这门科学......即在解决新问题的同时寻求使老问题化难为易的方法,在已有的材料之间建立新的联系,同时使许多个别研究的分散支流汇入一条统一的河道。

- 库朗《希尔伯特》

引用国内学者文献

[孙 1] 温一慧, 孙述寰。组合数学 [M]。兰州: 甘肃文化出版社, 1994

[林 11] 林诒勋。条目"组合最优化"-《中国百科全书》编委会,中国大百科全书 数学卷, 2版。 北京: 中国大百科全书出版社, 2009