

论算法的发现 (I) – 组合优化的基本方法 - 1993年01月

秦裕瑗 · 4 Jul 2025

数 学 杂 志 (J. of Math. PRC)
Vol.14(1994) No. 3. Page 436-444
收稿日期：1993-01-08

摘要 用 $\pi^{(t)}$ -集合表示具有规定性质 $\pi^{(t)}$ 的集合。 $\pi^{(t)}$ -对象是指具有规定结构的 $\pi^{(t)}$ -集合。 $\pi^{(t)}$ -集合本身是具有空结构的 $\pi^{(t)}$ -对象。

组合最优化的问题 XYZ 是指: 对于每一个 $\pi^{(1)}$ -集合, 从其诸 $\pi^{(2)}$ -对象中找出 $\pi^{(3)}$ -优者。以最小生成林问题、平面凸壳问题及整序问题 (§§2-5) 为实践背景, 对于问题 XYZ 的一个实例 S , 把集合 S 的 $\pi^{(1)}$ -子集合的全体记作簇 $\mathcal{F}$, 把这些子集合的 $\pi^{(3)}$ -优 $\pi^{(2)}$ -对象的全体记作簇 $\mathcal{F}^*$, 把实例 S 的 $\pi^{(2)}$ -对象(可行解)的全体记作 $\mathcal{D}$ 。

当问题 XYZ 是第一类优化问题, 规定

$$A \tilde{\oplus} B \equiv (A \cup B)^*, \quad A, B \in \mathcal{F}^*$$

则 $\{\mathcal{F}, *, \oplus\}$ 以及 $\{\mathcal{F}, \oplus\} (\oplus \equiv \cup)$ 是两个具有单位元素构成的带 (**band**)。把三个簇 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 与 $\mathcal{D}$ 合在一起, 记作 $\mathcal{F}\mathcal{F}^*\mathcal{D}$, 叫做实例 $\mathcal{S}$ 的解带 (**solution band**), 问题 XYZ 的所有实例 $\mathcal{S}$ 的解带构成这问题的解带簇。

从 $A \in \mathcal{F}$ 到 $A^* \in \mathcal{F}^*$, 算子 $*$ 是一个同态映射, 当 $\pi^{(2)}$ -对象是空结构时, 不但有

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$$

而且算子 $*$ 还是一个投影算子。

利用解带的几何直观, 探索实例的精确解, 有三种求解思路: 添元章法、同解章法与枚举章法。

关键词 第一类优化问题; 解带; 投影; 三种求解章法

组合优化是研究有限集合上各种优化问题的学问。

用 $\pi^{(t)}$ -集合表示具有规定性质 $\pi^{(t)} = \{\pi_s \mid s = 1, 2, \dots, |\pi^{(t)}|\}$ 的集合。 $\pi^{(t)}$ -对象是指具有规定结构的 $\pi^{(t)}$ -集合。如把若干个实数排成非减序列就是这实数集合的一种结构。 $\pi^{(t)}$ -集合本身是具有空结构的 $\pi^{(t)}$ -对象。

组合优化中的任一问题写作问题 XYZ 。

定义 1 问题 XYZ 是指：对于每一个 $\pi^{(1)}$ -集合，从其诸 $\pi^{(2)}$ -对象中找出 $\pi^{(3)}$ -优解。

在一个具体的 $\pi^{(1)}$ 集合 S 中寻找它的 $\pi^{(3)}$ 优 $\pi^{(2)}$ 对象 S^* 的任务叫做问题 XYZ 的一个实例 S 。 S^* 叫做集合 S (关于问题 XYZ) 的优化对象、优化解或解。当是空结构时， S^* 还叫做优化集合。

能够用以解决每一个实例的、具有准确步骤的方法叫做问题 XYZ 的一个算法。

对于空结构的 $\pi^{(2)}$ -对象，定义 1 与组合最优化的定义 (马仲蕃 1988) 相一致。因此，组合优化包括组合最优化。它还包括计算机科学、计算几何、排序论等等的许多问题。

组合优化的理论研究的中心内容是解问题，包括发现算法、研究问题之间、算法之间以及问题与算法之间的各种关系。

系列文章《论优化问题的公理方法 (I) — (V)》(秦裕瑗 1993) 讨论了这方面的问题。本系列文章作进一步的探讨，尤其着重探求所谓的算法的算法，即对于某些问题类，寻求系统的、统一的程序，以发现求解某具体问题的种种方法。

本文将讨论：组合优化的基本特征 (§1)，从三个具体问题 (§§2—5，最小生成林问题、平面凸壳问题与整序问题)，引申出解带 (solution band) 概念 (§6)。从几何直观，提出从 S 到 S^* 的投影概念。导出了求解第一类组合优化问题的三种方法：添元章法、同解章法与枚举章法。最后，提出一个设想，能否用篇法、章法、法与算法四个层次来系统地整理、概括并发展某些熟知的算法。

基本概念

直接从问题 XYZ 的定义出发，考察它的实例 S 的特征。

把 $\pi^{(2)}$ -对象叫做实例 S 的可行解，其全体叫做可行域，记作 $\mathcal{D}$ 。把每一个可行解看作一个点， $\mathcal{D}$ 是一个集合，把每一个可行解看作是对象，则 $\mathcal{D}$ 是一个族。

可行解 a 有一个 $\pi^{(3)}$ 值，它常常通过目标函数 $f(a)$ 算得一个实数值，设 $A \subseteq \mathcal{D}$ 。那些在集合 A 上的最优的可行解的全体记作 A^* ，叫做 A 的优化集合，于是

$$A^* = \{a^* \in A \mid \operatorname{opt}_{a \in A} f(a) = f(a^*)\}$$

在条件 $\pi^{(2)}$ 规定了 opt 是指取最大或最小，显然有：

$P1$ ：集合 A 有唯一的子集合 A^* 与之对应，写

$$A = A^* \cup \bar{A}, \quad A^* \cap \bar{A} = \emptyset$$

$P2$ ： A^* 非空当且仅当 A 非空。

优化集合 A^* 的每一个元素 a^* 是 A 的一个优化解。若 $|A^*| = 1$ ，还有 $A^* = \{a^*\} \equiv a^*$ 。

设目标函数的构成与集合 A 无关，即无论可行解 a 在那一个集合 $A(\subseteq \mathcal{D})$ 中，目标函数值 $f(a)$ 不变，例如 a 是赋权图中某个边子集合， $f(a)$ 是 a 的基数，或 a 的诸边的权之和。确实有不少优化问题的目标函数是随 A 而改变的，不过本系列文章将不涉及后一种情形。

把 A 作为整体，它的非空子集合 C 作为局部，有一个简明直观的经验之谈：

• 整体的最优解在局部也最优。

这是说，若 $A^* \cap C \neq \emptyset$ ，则 $A^* \cap C \subseteq C^*$ 。其实，还有 $A^* \cap C = C^*$ 。因为当 $a^* \in A^* \cap C$ ，竟然有 $c^* \in C^*/(A^* \cap C)$ ，应有：

$$f(a^*) = \underset{a \in A}{\text{opt}} f(a) = f(c^*)$$

从而 $c^* \in A^*$ 。矛盾。

把这事实叙述为

最优化原理 若整体有若干个最优解在局部之中，则它们是局部所仅有的最优解。

用符号表述为

最优化原理 设 $C \subseteq A$ ，且 $C \neq \emptyset$ 。若 $A^* \cap C \neq \emptyset$ ，则 $A^* \cap C = C^*$ 。

由这原理，即得(秦裕琰 1993)：

定理 1 (P3) 若 $C \subseteq A$ ，则 $\bar{C} \subseteq \bar{A}$ 。

定理 2 (P4) $(A \cup B)^* \subseteq (A^* \cup B)^*$

定理 3 $(A^* \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$

推论 P34) $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$

定理 4 P34成立的充要条件为 P3 与 P4 成立。

以上是对实例的可行解集合的情形讨论的。

像(秦裕琰 1993)中所述，有不少组合优化问题，其实例具有如下性质：

(i) 对于问题 XYZ 的实例 S ，集合 S 的 $\pi^{(1)}$ -子集合 A 也能构成一个实例 A 。

(ii) 集合 S 及它的 $\pi^{(1)}$ -子集合 A 总有其唯一的子集合作为它的优化集合，分别记作 S^* 或 A^* 。

(iii) P2 A^* 非空当且仅当 A 非空。

P3 若 $C \subseteq A$ ，则 $\bar{C} \subseteq \bar{A}$ 。

P4 $(A^* \cup B)^* \subseteq (A \cup B)^*$ 。

因此，这类优化问题，同样有 $P1$, $P2$ 与 $P34$ 。

性质 (ii) 有一定的局限性，若优化解 A^* 总是唯一的，则说涉及目标函数的参数是规范的。规范化是一种技术，它能在改变有关参数的值或标记方法之后，使优化解唯一，且这个优化解相当于未改变之前的诸优化解中的一个。许多优化问题都是能够规范化的。

在讨论 $\pi^{(2)}$ -对象时，补充规定：

(iv) A, B, A^*, B^* 之间进行交、并、补、差等运算时，结果首先是一个集合。如果结果具有明确规定的结构，才具有结构的意义。

例如 $A^* \cup \bar{A}, A^* \cup B$ 都是集合， $A^* \cap B^*$ 则具有结构的意义。

为了统一地讨论这些问题，我们作

定义 2 设 S 是含有有限个元素的论域，由集合 S 构成的 $\pi^{(1)}$ -子集合的全集记作 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(S)$:

π_{11} : $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

π_{12} : 若 $A \in \mathcal{F}$, 对于任意 $C \subseteq A$, 有 $C \in \mathcal{F}$;

π_{13} : $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{F}$,

则说 $\mathcal{F}$ 是一个 $\pi^{(1)}$ -簇。

定义 3 在 $\pi^{(1)}$ -簇 $\mathcal{F}$ 上，算子 $*$ 满足条件：

公理 1 ($P1$) $A \in \mathcal{F}$ 有唯一的 ($\pi^{(2)}$ -对象) A^* 与之对应。

公理 2 ($P2$) A^* 非空当且仅当 A 非空。

公理 3 ($P34$) $(A^* \cup B^*)^* = (A \cup B)^*$

则说 $*$ 是簇 $\mathcal{F}$ 上的第一类优化算子。

定义 4 对于问题 XYZ 的每一个实例 S , 我们把集合 S 的 $\pi^{(1)}$ -子集合的全体作为簇 $\mathcal{F}$, 以及把 $\pi^{(2)}$ -对象(可行解)的全体作为簇 $\mathcal{D}$ 。若能把求解实例 S 的任务与簇 $\mathcal{F}$ 或 $\mathcal{D}$ 集合上的第一类优化算子 $*$ 相对应, 则说问题 XYZ 是第一类优化问题。还把前者说作子集合型的, 后者是可行解型的。

当目标函数 $f(a)$ 与可行域 $\mathcal{D}$ 所选子集合无关, 问题 XYZ 总是可行解型第一类优化问题。

下面讨论三个第一类优化问题。

最小生成林问题的一个提法

最小生成树问题, 即问题 MST , 是熟知的。它的实例 S 有赋权连通图 $S = (V, E)$, 边 e 的权记作 $l(e)$ 。

首先，最小生成树一般并不唯一，但把权相等的那些边 $e = u_i v_j$ 用三元组 $(l(e), \min\{i, j\}, \max\{i, j\})$ 作为权，并以字典序排序，权就规范化了，解是唯一的。

第二，设 $\gamma(S)$ -图 S 是赋规范权的简单图，它的连通分枝数为 $\gamma(S)$ 。我们建议，不讨论问题 MST ，而讨论 MSF ，即最小生成林 (minimum spanning forest) 问题，这是指，实例 S 的 $\gamma(S)$ -图 S 中，在诸 $\gamma(S)$ -生成林中，寻找权和最小者，记作 S^* 。当然若 $\gamma(S)=1$ ，两个问题一致。这样解，可以更方便地讨论问题：一个简单图 S 的一个生成子图 A 总有它的 $\gamma(A)$ - MSF ，而连通图 S 的一个生成子图 A 不一定有 MST 。

第三，如果给定的图 A 本身就是一个林，那末 A 的 $\gamma(A)$ - MSF ，即 A^* ，就是 A 本身，即 $A^* = A$ 。

现在把问题 MSF 写成如下形式：实例 S 有 $\pi^{(1)}$ -图 $S = S(V, E)$

π_{11} : S 是简单图，连通分枝数为 $\gamma(S)$ ，

π_{12} : 边集合 $E = \{e_i | i = 1, 2, \dots, |E|\}$ 赋有规范权，
在诸 $\pi^{(2)}$ -子图，

π_{21} : 每一个都是 S 的 $\gamma(S)$ -生成林
中，求 $\pi^{(3)}$ -优者：

π_{31} : 生成林的值等于林的诸边的权之和，

π_{32} : 值以小为优。

求得的 S^* 叫做 S 的最小生成林。

问题 MSF (以及问题 MST) 是可行解型第一类优化问题。

对于赋规范权简单图 S 的一个生成子图 A ，如果含有圈，则圈的权最大的诸边中，按字典序最后一条应予删去，从而不属 A^* ，即对于 $A \cup B$ ，有

$$(A^* \cup B)^* = (A \cup B)^*$$

于是 $P34$ 成立。所以，问题 MSF 也是子集合型第一类优化问题。

最小生成林问题的解

对于问题 MSF 的实例 S ， MSF 有三个特征。首先，它是图 S 的一个生成子图，其次，它是一个生成林；第三，它的连通分枝数等于 $\gamma(S)$ 。因此， S^* 涉及到三个图簇，一是图 S 的生成子图的全体，记作簇 $\mathcal{F}$ ；二是 $\mathcal{F}$ 中的生成林的全体，即那些满足条件 $A = A^*$ 的图 A ，记作簇 $\mathcal{F}^*$ ；第三是簇 $\mathcal{F}^*$ 中 $\gamma(S)$ -生成林的全体，记作簇 $\mathcal{D}$ 。显然有

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}(S)$$

簇 $\mathcal{F}$ 含有 $2^{|E|}$ 个生成子图。以子图所含边数为参数, $\mathcal{F}$ 被分成 $(|E| + 1)$ 层, 最高层是第 $|E|$ 层, 只有一个元素, 就是图 S 。而空图 ϕ 在最底层, 是第 0 层。根据 $\gamma(S)$ -生成林的特征, $\mathcal{D}$ 中每一个图都含有 $|V| - \gamma(S)$ 条边。所以它们都在第 $(|V| - \gamma(S))$ 层, 所求的解 S^* 就在这一层里。

关于子图间的并运算, 如果 $A, B \in \mathcal{F}$, 定义 $A \oplus B \equiv A \cup B$, 则 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 是一个带(band), 即 $\mathcal{F}$ 是一个具有零元素的交换半群, 且是 $\oplus$ -幂等的(即 $A \oplus A = A$)。

关于子图间的包含关系, $\mathcal{F}$ 是半序的, 称为半序集合 $\{\mathcal{F}, \subset\}$ 。

从不同的观点考察同一个 $\mathcal{F}$, 可以设簇 $\mathcal{F}$, 集合 $\mathcal{F}$, 半序集合 $\{\mathcal{F}, \subset\}$ 以及带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 等等。

簇 $\mathcal{F}^*$ 中的最小元为空图 ϕ , 在第 0 层, 而最大元 S^* 在 $\mathcal{F}^*$ 的最高层。

关于并运算, $\{\mathcal{F}^*, \oplus\}$ 不是带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 的一个子带。然而, 对于 $A, B \in \mathcal{F}^*$, 我们定义

$$A \tilde{\oplus} B \equiv (A \cup B)^*$$

不难证明, 集合 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 是一个带。

簇 $\mathcal{F}$ 中每一个元素 A 是赋规范范数的简单图。它唯一地对应 $\mathcal{F}^*$ 中的元素 A^* , 一个 $\gamma(A) - MSF$ 。而图 A^* 当然属于 $\mathcal{F}$ 。它的 $\gamma(A^*) - MSF$ (即 $\gamma(A) - MSF$) 就是 A^* 本身, 即 $(A^*)^* = A^*$ 。这表明, 算子 $*$ 具有投影的特征。

因为当 $A^* \subseteq C \subset A$, 总有 $C^* = A^*$ 。所以 $\zeta_A = \{C | A^* \subseteq C \subset A\}$ 中每一个元素 C 在带 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 中有相同的投影 A^* , 即有相同的 $\gamma(A)$ -最小生成林, 从而集 $\mathcal{F}$ 可利用 $\mathcal{F}^*$ 进行划分。

总之, 对于问题 MSF 的实例 S , $\gamma(S)$ 图 S 有带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 和带 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$, 算子 $*$ 是从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}^*$ 的一个同态映射:

$$*: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^*$$

$$A \mapsto A^*, B \mapsto B^*$$

$$A \oplus B \mapsto A^* \tilde{\oplus} B^*$$

不仅如此, $*$ 还是一个投影算子。

平面凸壳问题

凸壳问题是离散型计算几何的中心问题之一, 它不仅有广泛的实际应用, 也是求解许多表面上互不相关的问题的一个有力工具。

仅是为了达到我们的目的, 限于讨论平面凸壳(planar convex hull)问题, 即问题 PCH 。这是指, 求包含平面有限点集的最小凸多边形, 叫做凸壳。等价地, 在点集合中找出这样的凸子集合 (即以它作为顶点集合能围成一个(闭)凸多边形域), 含有所给的点集合。凸壳是唯一的。

问题 PCH 的实例 S 可以写成下面形式: 设有 $\pi^{(1)}$ -集合 S ;

π_{11} : S 是平面点集合,

π_{12} : $|S|$ 是有限的,
在诸 $\pi^{(2)}$ -子集合 A

π_{21} : A 是凸集合,
中, 求 $\pi^{(3)}$ -优者:

π_{31} : 由 $\pi^{(2)}$ -凸集合 A 围成的凸多边形域记作 A , 规定 A 的值为

$$f(A) = \begin{cases} 1: (x \notin A) \subset S \\ 0: (x \notin A) \subsetneq S \end{cases}$$

π_{32} : 值以小为优。
求得的 S^* 叫做 S 的凸壳。

对于点集合 S , 它的子集合的全体记作簇 $\mathcal{F}$, 那些凸子集合的全体记作簇 $\mathcal{F}^*$, 而 S 的所有可行解, 即凸集合, 记作 $\mathcal{D}$, 显然有

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$$

$\{\mathcal{F}, \oplus\}$, $\oplus \equiv \cup$, 是一个带, $\{\mathcal{F}, \tilde{\oplus}\}$ 也是一个带, 其中

$$A \tilde{\oplus} B = (A \cup B)^*, A, B \in \mathcal{F}^*$$

算子在 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 与 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 之间是一个同态映射。

因为 A 的凸壳为 A^* , 集合 A^* 的凸壳就是 A^* 本身。因此, A^* 是带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 中的 A 在带 $\{\mathcal{F}, \tilde{\oplus}\}$ 中的投影, $*$ 是一个投影像子。

问题 PCH 显然是可行解型第一类优化问题。它还是子集合型第一类优化问题。因为 $A = A^* \cup \bar{A}$, 当 $\bar{A} \neq \phi$ 时, 属于 $\bar{A}$ 的点不会属于 $\overline{A^* \cup B}$, 所以有 $P34$ 。

排序问题

排序(sorting)问题问题 SOR , 是指: 把有限互异整数排成递增序列。

这是计算科学中应用最广、研究最深的问题之一。

把整数集合 $\{a_i | i = 1, 2, \dots, \alpha\}$ 排成一个序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\alpha}$, 记作 $[\{a_{i_j}\}]$ 或 $[\{a_{i_1}, \dots, a_{i_\alpha}\}]$ 。采用符号 $[\quad]$, 以便参加加运算。若 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\alpha}$ 是递增的, 于是

$$\{a_i | i = 1, 2, \dots, \alpha\}^* = [\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\alpha}\}]$$

例如

$$\{3, 1, 2\}^* = [1, 2, 3]$$

问题 SOR 的实例 S 可以写成下面形式: 设有 $\pi^{(1)}$ -集合 $S = \{s_i | i = 1, 2, \dots, \sigma\}$

π_{11} : 诸元素 s_i 为互异整数。

π_{12} : $|S|$ 为有限。

在诸 $\pi^{(2)}$ -对象

π_{21} : 它的元素不重复地取尽 S ,

π_{22} : 结构是排成一个序列,

中, 求 $\pi^{(3)}$ -优者;

π_{31} : 序列 $[s_1, s_2, \dots, s_\sigma]$ 的目标函数值为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_{i+1} - s_i}{|s_{i+1} - s_i|}$$

π_{31} : 值以大者为优,

求得的 $S^* = [s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_\sigma}]$ 叫做 S 的整序。

所以, 问题 SOR 是一个组合优化问题。

把集合 S 的子集合全体记作簇 $\mathcal{F}$, 对于 $A \in \mathcal{F}$, 有唯一的整序 (递增序列) A^* 。这种整序的全体记作簇 $\mathcal{F}^*$, 集合 S 的所有排列 (可行解) 记作簇 $\mathcal{D}$ 。

问题 SOR 显然是 ($\mathcal{D}$ 上)可行解型的第一类优化问题。它还是子集合型的第一类优化问题。因为 A 有唯一的整序 A^* , $(A^* \cup B^*)^*$ 是指两个递增序列 A^*, B^* 合并成一个递增序列, 显然有

$$P34: (A^* \cup B^*)^* = (A \cup B)^*$$

$\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 与 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 是两个带。算子 $*$ 在它们之间是一个同态映射, 但是 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}^*$ 之间没有包含关系, 也没有投影概念。

优化问题的解答与求解的三个算法

以上述的三个问题为实践背景, 来讨论一般性问题。

设有问题 XYZ 的一个实例 S , 对于集合 S , $\pi^{(1)}$ -集合的全体记作簇 $\mathcal{F}$ 。 $\pi^{(2)}$ -对象的全体记作簇 $\mathcal{F}^*$ 。 S 的可行解的全体记作簇 $\mathcal{D}$ 。总有

$$\mathcal{D}^* \in \mathcal{D} \cap \mathcal{F}^*$$

对于(子集合型 \可行解型)第一类优化问题, $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 与 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 是两个带。算子 $*$ 是从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}^*$ 的一个同态映射:

$$*: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^*$$

$$A \mapsto A^*, B \mapsto B^*$$

$$A \oplus B \mapsto A^* \tilde{\oplus} B^*$$

对于非空结构 $\pi^{(1)}$ -对象 (例如整序问题), $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}^*$ 之间没有包含关系。对于空结构 $\pi^{(2)}$ -对象 (如最小生成林问题与平面凸壳问题), 则有

$$S^* \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$$

这时, 同态映射 $*$ 还是一种投影, 即 $A \in \mathcal{F}$ 的解 A^* 是带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 中的元素 A 在带 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 中的投影。因为有 $(A^*)^* = A^*$ 。

无论 $\pi^{(1)}$ -对象的结构是否非空, 把三个簇 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 与 $\mathcal{D}$ 合并, 记作 $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{D}$ 。叫做实例 S 的解带 (solution band)。

问题 XYZ 的每一个实例有一个解带, 所有实例的解带构成问题 XYZ 的解带簇。

求解实例 S , 即求出 S^* , 是我们目的。解带的几何直观性提供了几个求解的思路, 称为章法。

第一种算法是在带 $\{\mathcal{F}^*, \tilde{\oplus}\}$ 中如何从确定的、已知的空集合 ϕ 出发找出 S^* 。在(秦裕琰 1993)的文 (II)等中已讨论过: 若 $S = \{a_i \mid i = 1, 2, \dots, \alpha\}$, 记作

$$S = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_\alpha$$

则

$$S^* = a_1 \tilde{\oplus} a_2 \tilde{\oplus} \dots \tilde{\oplus} a_\alpha \quad (0.1)$$

利用公式右端, 有多种方法来求解 S^* 。所有这些统称为添元章法, 最基本的一种是生成法: 作

$$S_i = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_i \quad (0.2)$$

$$S^{(i)} = a_1 \tilde{\oplus} a_2 \tilde{\oplus} \dots \tilde{\oplus} a_i \quad (0.3)$$

于是

$$S^{(i)} = S^{(i-1)} \tilde{\oplus} a_i$$

及

$$\phi \equiv S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(\alpha)} = S \quad (0.4)$$

针对§§2-5的三个问题, 对于集合 S (依次当作赋规范权简单图/平面有限点集合/有限互异整数集合), 作出含有 i 个元素的子集合 S_i (生成子图/点子集合/数的集合) 的 $\pi^{(3)}$ 优的 $\pi^{(2)}$ -对象 ($\gamma(S_i)$ - MSF /凸壳/递增数列), 于是 $S^{(\alpha)}$ 是所求的优化解 ($\gamma(S) - MSF/S$ 的凸壳/ S 的递增数列)。具体化到这三个问题, 得到相应的生成算法。

对于问题 MSF 的实例 S , 如果把诸边按其权的递增性先排成一列。再用生成法, 得到一种改进, 是熟知的 Kruskal 算法 (1936)。

把(0.1)的右端两两相加, 而得分治法, 也不难应用来求解上述三个问题。

第二种算法是从确定的、已知的集合 S 出发。沿着什么途径到达 S^* 。第一种仅限在带 $\{\mathcal{F}, \oplus\}$ 之中, 这时 S^* 只能是空结构。

簇 $\zeta_A \equiv \{A | S^* \subseteq A \subseteq S\}$ 是带 $\{\mathcal{F}^*, \oplus\}$ 的一个子带，只是它的零元素是 S^* 。这时 $A^* = S^*$ ，即簇 ζ_A 中每一个集合 A 都与 S 有同解。

一种求解 S^* 的方法是在簇 ζ_A 中设计一个序列

$$S \equiv S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(i)}, \dots, S^{(m)}, S^{(m+1)} \equiv S^* \quad (0.5)$$

其中

$$S^* \subseteq S^{(i+1)} \subseteq S^{(i)} \quad (0.6)$$

$$|S^{(i+1)}| \leq |S^{(i)}| \quad (0.7)$$

问题 MSF 与 MST 的破圈法(管梅谷, 1975), 问题 PCH 的 Hadwiger-Debrunner 算法(1984) 都属于这一类。

对于问题 XYZ 的一个实例 S ，除了 ζ_A 之外，还可能有多数的实例与实例 S 有相同的解 S^* 。把所有这种实例记作 $\mathcal{S}_A$ ，叫做实例 S 的同解实例簇。实例 S 与实例 S^* 都在其中。于是可以像(0.5)那样，在 $\mathcal{S}_A$ 内设计出求解方法。这时无需有(0.6)与/或(0.7)。这两种方法统称为同解章法，在(秦裕瑗 1993)中已经作了初步讨论。几种叠代法以及离散型动态规划方法都属于此。

第三种是在可行解集合 $\mathcal{D}$ 中找出优化解 S^* ，即求解

$$\underset{a \in \mathcal{D}}{\text{opt}} f(a) = f(S^*)$$

求解的基本方法是枚举，以及由之发展起来的隐枚举法、分枝定界法，规划论法、凸多面体法以及本系列文章将介绍的对称差（的）分解法等等，这里统称为枚举章法。

以上讲的三种章法都是求精确解的，统称为精确篇法。

写一本内容丰富的书，总纲之下，分篇、章、节、段、句，以示层次，并以节为基本单位。组合优化涉及面很广，有多数的求解方法。为了表达这些方法清楚些，有必要在总纲之下，也分层别类。我们建议，分四个层次；篇法，章法、法和算法，而以法作为基本单位。对于第一类优化问题的求解方法，至少有四个篇法。精确篇法、近似篇法、启发篇法和随机篇法。在精确篇法下，至少有三个章法：添元章法、同解章法和枚举章法。添元章法又有生成法、分治法、层次法等等。一个具体的优化问题，它本身有其具体的术语，概念与表达形式，有其特征（如平面性、欧氏距离、非负性等），还有相应的计算方法，数据结构的成果等。借助所有这些，把上面讲的篇法、章法与法应用过来而得到的方法以及其改进，统称为求解这问题的算法。

本系列文章中，把篇法、章法、法与算法作为专门术语，而把方法、解法这两个词作为一般名词。让它们带有某些含糊之处，便于行文。至于问题这个词既是专门的又是一般的。

事情发展到某种程度以后，人们也许有一天手边开始有一个不断需要完善的“提纲”。用它来帮助人们判断一个崭新的组合优化问题属于那一类。果然在“提纲”之内，人们就可以按部就班地探求各种算法。还用它来帮助人们整理熟知的问题的许多算法。“提纲”可收到纲举目张的效果，“提纲”成了“算法的算法”。这也许是一个梦思，却是值得追求的。

致谢 1993年5月作者访问新疆大学与兰州大学教学系，与张福基、郭韦琦两教授讨论过程中得到启发，从而建立了解带和投影这两个概念，引发了这篇文章，特此致谢。

秦裕瑗. 1993. “组合优化问题的公理方法(i)-(III).” 应用数学.

马仲蕃. 1988. 中国大百科全书 数学卷. 数学卷. 中国大百科全书出版社.