Décompositions utiles en algèbre linéaire (CPGE)

written by punicwars on Functor Network
original link: https://functor.network/user/2818/entry/955

This document is intended for students in the french CPGE system.

Ce document est déstiné aux élèves en classes préparatoires françaises.

Décomposition de Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons $\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha_1} & 0 & & 0 \\ 0 & A_{\alpha_2} & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

où A_{α_k} est la matrice $\alpha_k \times \alpha_k$ égale à $\lambda_k I_{\alpha_k} + \begin{pmatrix} J_{n_{1,k}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_{r,k}} \end{pmatrix}$ avec $n_{1,k} + \cdots + n_{r,k} = \alpha_k$ et les J_i sont les blocs de Jordan.

Démonstration :

À partir du théorème de trigonalisation par blocs, il suffit de montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan.

Procédons par récurrence sur la taille de la matrice nilpotente. Le résultat est clair dans $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat établi pour tout $k < n$.

Soit N une matrice $n \times n$ nilpotente, notons p son indice de nilpotence et n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $n^{p-1}(x) \neq 0$ (sinon cela contredit la minimalité de p). La famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre (sinon considérer une combinaison linéaire nulle et itérer u), notons $G = Vect(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.

Considérons maintenant ϕ une forme linéaire telle que $\phi(u^i(x)) = 0$ si $i < p - 1$ et $\phi(u^{p-1}(x)) = 0$ et posons $F = \bigcap_{i=0}^{p-1} \dim \ker(\phi \circ u^i)$ de telle sorte que F est l'intersection de p hyperplans donc $\dim F \geq n - p$.

Montrons que F est stable par u : Soit $y \in F$, soit $0 \leq i \leq p - 1$, alors $y \in \ker \phi \circ u^{i+1}$ donc $u(y) \in \ker \phi \circ u^i$ et donc $u(y) \in F$.

Montrons maintenant que $G \oplus F = E$. Soit $y \in G \oplus F$, si $y \neq 0$ alors il existe P un polynôme unitaire de degré $d \leq n-1$ tel que $y = P(u)(x)$, mais alors $\phi \circ u^{p-1-d}(y) = \phi((X^{p-1-d}P)(u)(x)) = \phi(u^{p-1}(x)) = 1$ donc F et G sont en somme directe. Et comme $\dim F \geq n-p$, on a que F et G sont deux supplémentaires stables par u.

Donc $\mathrm{Mat}_{(x,u(x),\ldots,u^{p-1}(x))}(u|_G) = J_p$. Puis $u|_F$ est nilpotente et, par hypothèse de récurrence, en considérant une base β de F dans laquelle $\mathrm{Mat}_\beta(u|_G)$ respecte la condition de l'énoncé, on trouve que $\mathrm{Mat}_{(u(x),\ldots,u^{p-1}(x),\beta)}(u)$ respecte la condition de l'énoncé, cela conclut.

Décomposition de Frobenius

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite de polynômes de $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ tel que Π_1 soit le polynôme minimal de A et $\Pi_r|\Pi_{r-1}|\ldots|\Pi_1$ et A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(\Pi_1) & & & \\ & \mathcal{C}(\Pi_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{C}(\Pi_n) \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Procédons par récurrence sur n, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons $E = \mathbb{K}^n$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme canoniquement associé. Notons $\Pi_1 = P_1^{\alpha_1} \ldots P_m^{\alpha_m}$ la décomposition du polynôme minimal de A (et de u) en irréductibles.

Définissons, pour $e \in E$, le polynôme minimal ponctuel de u pour e, $\Pi_{u,e}$ (polynôme unitaire non-nul de degré minimal annulant $u(e)$).

Lemme 1 :

Pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $e_i \in E$ tel que $\Pi_{u,e_i} = P_i^{\alpha_i}$.

Démonstration : Soit $i \in [\![1, m]\!]$.D'abord, si aucun élément de $e \in E$ est annulé par $P_i^{\alpha_i}(u)$ alors il suffit de considérons le polynôme $\frac{\Pi_1}{P_i^{\alpha_i}}$ qui annule donc u, ce qui contredit la minimalité de Π_1.

Ainsi, pour $e \in \ker(P_i^{\alpha_i}(u))$, $\Pi_{u,e}$ divise nécessairement $P_i^{\alpha_i}$ et s'écrit donc P_i^k pour $k \leq \alpha_i$. Supposons par l'absurde que pour tout $e \in \ker P_i^{\alpha_i}(u)$, $\Pi_{u,e} \neq P_i^{\alpha_i}$. Alors $\Pi_{u,e}|P_i^{\alpha_i - 1}$ et donc $\frac{\Pi_1}{P_i}$ annule u, de nouveau une contradiction.

Lemme 2 :

Il existe $e \in E$ tel que $\Pi_{u,e} = \Pi_1$.

Démonstration :

Prenons, pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, e_i tel que $\Pi_{u,e_i} = P_i^{\alpha_i}$. Posons $e = e_1 + \cdots + e_n$ et notons $\Pi_{u,e} = P_1^{\beta_1} \dots P_m^{\beta_m}$ (avec $\beta_i \leq \alpha_i$). Pour chaque $j \in [\![1, m]\!]$, posons $Q_j = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_{u,e} P_j^{\alpha_j - \beta_j}}$ de telle sorte que $0 = Q_j \Pi_{u,e}(e) = \dfrac{\Pi_1}{P^{\alpha_j - \beta_j}}(u)(e) = \dfrac{\Pi_1}{P^{\alpha_j - \beta_j}}(e_j)$. Et donc $P_j^{\alpha_j}$ divise $\dfrac{\Pi_1}{P^{\alpha_j - \beta_j}}$ donc $\alpha_j \leq \beta_j \leq \alpha_j$ d'où $\Pi_{u,e} = \Pi_1$.

Prenons maintenant e tel que $\Pi_{u,e} = \Pi_1$ et posons $d = \deg \Pi_1$, de la sorte, la famille $(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$ est libre et en notant $G = Vect(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$, G est stable par u et $\mathrm{Mat}_{(e, \dots, u^{d-1}(e))}(u|_G)$ vaut $\mathcal{C}(\Pi_{u,e}) = \mathcal{C}(\Pi_1)$.

Comme pour la décomposition de Jordan, prenons φ une forme linéaire telle que $\varphi \circ u^i(e) = 0$ si $i < d - 1$ et $\varphi \circ u^{d-1}(e) = 1$. Et on montre alors que $F = \bigcap_{i=0}^{d-1} \ker(\varphi \circ u^i)$ est stable par u, de dimension au moins $n - d$ et que $F \oplus G = E$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence on conclut. De plus $\Pi_2 = \Pi_{u|_F}$ divise Π_1 car $\Pi_1(u|_F) = 0$.

Décomposition de Dunford (N+D)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé. Alors il existe d diagonalisable et n nilpotente telle que $dn = nd$ et $u = d + n$.

Démonstration :

Notons $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, le théorème de trigonalisation par blocs montre que $\mathrm{Mat}_{b.c}(u)$ est semblable à une matrice triangulaire par blocs A_i de taille α_i avec λ_i sur la diagonale. On peut noter chacun de ces blocs $A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ où N_i est triangulaire supérieure stricte. En notant D la matrice par blocs des $\lambda_i I_{\alpha_i}$ et N la matrice par blocs des N_i.

Décomposition QR

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux positifs tels que $A = QR$.

Démonstration :

Supposons d'abord que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt des colonnes $C_1, \dots, C_n$.

Alors $A = \mathrm{Mat}_{b.c}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Mat}((\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \to b.c)\mathrm{Mat}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)}(C_1, \dots, C_n)$.

En notant ces deux matrices Q et R respectivement, on en déduit le résultat voulu.

Décomposition de Cholesky

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe B triangulaire supérieure à coeffiecients diagonaux strictement positifs telle que $A = B^T B$.

Démonstration 1 :

Par le lemme de la racine carré, il existe $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = H^T H$. Notons $H = QR$ sa décomposition QR de telle sorte que $A = R^T O^T O R = R^T R$, cela conclut.

Démonstration 2 :

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, définissons le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, $\phi(X, Y) = X^T A Y$. Alors $A = \mathrm{Mat}_{b.c}(\phi)$.

Soit $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de la base canonique pour ϕ. Notons $P = \mathrm{Mat}_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)}(b.c)$ de telle sorte que P soit triangulaire supérieure à coefficients strictements positifs. Et $P^T A P = \mathrm{Mat}_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)}(\phi) = I_n$. Et donc en posant $B = P^{-1}$ on a fini.

Décomposition de Cartan

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ satisfaisant $A = OS$.

Démonstration :

Démontrons la deuxième partie du résultat, soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet donc une racine carrée $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Posons alors $O = AS^{-1}$ de la sorte que $O^T O = (S^T)^{-1} A^T A S^{-1} = (S^T)^{-1} S^T S S^{-1} = I_n$ et alors O est orthogonale et satisfait $A = OS$. L'unicité découle du fait que si $A = OS$ alors $A^T A = S^2$ mais S est unique par le lemme de la racine carrée et donc O l'est aussi.