

# Décompositions utiles en algèbre linéaire (CPGE)

punicwars • 11 Mar 2025

This document is intended for students in the french CPGE system.

Ce document est destiné aux élèves en classes préparatoires françaises.

## 0.1 Décomposition de Jordan

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , notons  $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ . Alors  $A$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha_1} & 0 & & 0 \\ 0 & A_{\alpha_2} & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

où  $A_{\alpha_k}$  est la matrice  $\alpha_k \times \alpha_k$  égale à  $\lambda_k J_{\alpha_k} + \begin{pmatrix} J_{n_{1,k}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_{r,k}} \end{pmatrix}$  avec  $n_{1,k} + \dots + n_{r,k} = \alpha_k$  et les  $J_i$  sont les blocs de Jordan.

*Démonstration :*

À partir du théorème de trigonalisation par blocs, il suffit de montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan.

Procédons par récurrence sur la taille de la matrice nilpotente. Le résultat est clair dans  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons le résultat établi pour tout  $k < n$ .

Soit  $N$  une matrice  $n \times n$  nilpotente, notons  $p$  son indice de nilpotence et  $n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé. Il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $N^{p-1}(x) \neq 0$  (sinon cela contredit la minimalité de  $p$ ). La famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre (sinon considérer une combinaison linéaire nulle et itérer  $u$ ), notons  $G = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ .

Considérons maintenant  $\phi$  une forme linéaire telle que  $\phi(u^i(x)) = 0$  si  $i < p - 1$  et  $\phi(u^{p-1}(x)) = 1$  et posons  $F = \bigcap_{i=0}^{p-1} \ker(\phi \circ u^i)$  de telle sorte que  $F$  est l'intersection de  $p$  hyperplans donc  $\dim F \geq n - p$ .

Montrons que  $F$  est stable par  $u$  : Soit  $y \in F$ , soit  $0 \leq i \leq p-1$ , alors  $y \in \ker \phi \circ u^{i+1}$  donc  $u(y) \in \ker \phi \circ u^i$  et donc  $u(y) \in F$ .

Montrons maintenant que  $G \oplus F = E$ . Soit  $y \in G \oplus F$ , si  $y \neq 0$  alors il existe  $P$  un polynôme unitaire de degré  $d \leq n-1$  tel que  $y = P(u)(x)$ , mais alors  $\phi \circ u^{p-1-d}(y) = \phi((X^{p-1-d}P)(u)(x)) = \phi(u^{p-1}(x)) = 1$  donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe. Et comme  $\dim F \geq n-p$ , on a que  $F$  et  $G$  sont deux supplémentaires stables par  $u$ .

Donc  $\text{Mat}_{(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))}(u|_G) = J_p$ . Puis  $u|_F$  est nilpotente et, par hypothèse de récurrence, en considérant une base  $\beta$  de  $F$  dans laquelle  $\text{Mat}_\beta(u|_G)$  respecte la condition de l'énoncé, on trouve que  $\text{Mat}_{(u(x), \dots, u^{p-1}(x), \beta)}(u)$  respecte la condition de l'énoncé, cela conclut.

## 0.2 Décomposition de Frobenius

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il existe une suite de polynômes de  $\Pi_1, \dots, \Pi_r$  tel que  $\Pi_1$  soit le polynôme minimal de  $A$  et  $\Pi_r | \Pi_{r-1} | \dots | \Pi_1$  et  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(\Pi_1) & & & \\ & \mathcal{C}(\Pi_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{C}(\Pi_n) \end{pmatrix}$$

*Démonstration :*

Procédons par récurrence sur  $n$ , soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Notons  $E = \mathbb{K}^n$  et considérons  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme canoniquement associé. Notons  $\Pi_1 = P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}$  la décomposition du polynôme minimal de  $A$  (et de  $u$ ) en irréductibles.

Définissons, pour  $e \in E$ , le polynôme minimal ponctuel de  $u$  pour  $e$ ,  $\Pi_{u,e}$  (polynôme unitaire non-nul de degré minimal annihilant  $u(e)$ ).

**Lemme 1 :**

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , il existe  $e_i \in E$  tel que  $\Pi_{u,e_i} = P_i^{\alpha_i}$ .

*Démonstration :* Soit  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . D'abord, si aucun élément de  $e \in E$  est annihilé par  $P_i^{\alpha_i}(u)$  alors il suffit de considérer le polynôme  $\frac{\Pi_1}{P_i^{\alpha_i}}$  qui annule donc  $u$ , ce qui contredit la minimalité de  $\Pi_1$ .

Ainsi, pour  $e \in \ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ ,  $\Pi_{u,e}$  divise nécessairement  $P_i^{\alpha_i}$  et s'écrit donc  $P_i^k$  pour  $k \leq \alpha_i$ . Supposons par l'absurde que pour tout  $e \in \ker P_i^{\alpha_i}(u)$ ,

$\Pi_{u,e} \neq P_i^{\alpha_i}$ . Alors  $\Pi_{u,e} | P_i^{\alpha_i-1}$  et donc  $\frac{\Pi_1}{P_i}$  annule  $u$ , de nouveau une contradiction.

## Lemme 2 :

Il existe  $e \in E$  tel que  $\Pi_{u,e} = \Pi_1$ .

*Démonstration :*

Prenons, pour chaque  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $e_i$  tel que  $\Pi_{u,e_i} = P_i^{\alpha_i}$ . Posons  $e = e_1 + \dots + e_m$  et notons  $\Pi_{u,e} = P_1^{\beta_1} \dots P_m^{\beta_m}$  (avec  $\beta_i \leq \alpha_i$ ). Pour chaque  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , posons  $Q_j = \frac{\Pi_1}{\Pi_{u,e} P_j^{\alpha_j - \beta_j}}$  de telle sorte que  $0 = Q_j \Pi_{u,e}(e) = \frac{\Pi_1}{P_j^{\alpha_j - \beta_j}}(u)(e) = \frac{\Pi_1}{P_j^{\alpha_j - \beta_j}}(e_j)$ . Et donc  $P_j^{\alpha_j}$  divise  $\frac{\Pi_1}{P_j^{\alpha_j - \beta_j}}$  donc  $\alpha_j \leq \beta_j \leq \alpha_j$  d'où  $\Pi_{u,e} = \Pi_1$ .

Prenons maintenant  $e$  tel que  $\Pi_{u,e} = \Pi_1$  et posons  $d = \deg \Pi_1$ , de la sorte, la famille  $(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$  est libre et en notant  $G = \text{Vect}(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$ ,  $G$  est stable par  $u$  et  $\text{Mat}_{(e, \dots, u^{d-1}(e))}(u|_G)$  vaut  $\mathcal{C}(\Pi_{u,e}) = \mathcal{C}(\Pi_1)$ .

Comme pour la décomposition de Jordan, prenons  $\varphi$  une forme linéaire telle que  $\varphi \circ u^i(e) = 0$  si  $i < d-1$  et  $\varphi \circ u^{d-1}(e) = 1$ . Et on montre alors que  $F = \bigcap_{i=0}^{d-1} \ker(\varphi \circ u^i)$  est stable par  $u$ , de dimension au moins  $n-d$  et que  $F \oplus G = E$ , donc en utilisant l'hypothèse de récurrence on conclut. De plus  $\Pi_2 = \Pi_{u|_F}$  divise  $\Pi_1$  car  $\Pi_1(u|_F) = 0$ .

### 0.3 Décomposition de Dunford (N+D)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé. Alors il existe  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotente telle que  $dn = nd$  et  $u = d + n$ .

*Démonstration :*

Notons  $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ , le théorème de trigonalisation par blocs montre que  $\text{Mat}_{b,c}(u)$  est semblable à une matrice triangulaire par blocs  $A_i$  de taille  $\alpha_i$  avec  $\lambda_i$  sur la diagonale. On peut noter chacun de ces blocs  $A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$  où  $N_i$  est triangulaire supérieure stricte. En notant  $D$  la matrice par blocs des  $\lambda_i I_{\alpha_i}$  et  $N$  la matrice par blocs des  $N_i$ .

### 0.4 Décomposition QR

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  et  $R \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$  à coefficients diagonaux positifs tels que  $A = QR$ .

*Démonstration :*

Supposons d'abord que  $A \in GL_n(\mathbb{R})$   $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  et  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt des colonnes  $C_1, \dots, C_n$ .

Alors

$$A = \text{Mat}_{b.c}(C_1, \dots, C_n) = \text{Mat}((\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \rightarrow b.c) \text{Mat}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)}(C_1, \dots, C_n).$$

En notant ces deux matrices  $Q$  et  $R$  respectivement, on en déduit le résultat voulu.

## 0.5 Décomposition de Cholesky

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , il existe  $B$  triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que  $A = B^T B$ .

*Démonstration 1 :*

Par le lemme de la racine carrée, il existe  $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A = H^T H$ .

Notons  $H = QR$  sa décomposition QR de telle sorte que

$$A = R^T O^T O R = R^T R, \text{ cela conclut.}$$

*Démonstration 2 :*

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , définissons le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi(X, Y) = X^T A Y$ . Alors  $A = \text{Mat}_{b.c}(\phi)$ .

Soit  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de la base canonique pour  $\phi$ . Notons  $P = \text{Mat}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)}(b.c)$  de telle sorte que  $P$  soit triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs. Et  $P^T A P = \text{Mat}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)}(\phi) = I_n$ . Et donc en posant  $B = P^{-1}$  on a fini.

## 0.6 Décomposition de Cartan

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  satisfaisant  $A = OS$ .

*Démonstration :*

Démontrons la deuxième partie du résultat, soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .  $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et admet donc une racine carrée  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Posons alors  $O = AS^{-1}$  de la sorte que  $O^T O = (S^T)^{-1} A^T A S^{-1} = (S^T)^{-1} S^T S S^{-1} = I_n$  et alors  $O$  est orthogonale et satisfait  $A = OS$ . L'unicité découle du fait que si  $A = OS$  alors  $A^T A = S^2$  mais  $S$  est unique par le lemme de la racine carrée et donc  $O$  l'est aussi.