Algunas cuestiones sobre variedades diferenciales y sus definiciones, realizado por: Ordoñe Mariano, Milton Plasencia, Uribarri Juan Bonafe.

Uribarri_euskadi. • 18 Sep 2025

Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu presentan una definición de variedad diferencial en su libro *Fundations of Differential Geometry* la cual no hacen referencia alguna al Segundo Axioma de Numerabilidad (N2). Estrictamente presentan una variedad diferencial como un espacio de Hausdorff sumado de un atlas fijo que es compatible con un Pseudogrupo de transformaciones $\Gamma^r(\mathbb{R}^n)$ de clase C^r.

A lo largo de múltiples lecturas hemos visto como autores distintos piden el requisito de que el espacio topológico donde se desarrolla todo deba ser N2. Debido a estas extrañas inconsistencias en la definición, hemos discutido múltiples veces si los homeomorfismos pueden inducir N2 en la variedad.

Se presenta la siguiente pregunta

> *¿Pedir que un espacio topológico $\mathcal{M}$ sea Hausdorff compatible con $\Gamma^r(\mathbb{R}^n)$, es suficiente para inducir N2 al menos localmente ?*

Una de las ideas para testear si esto tiene sentido es definir el siguiente conjunto

$$\Lambda := \{U \in \tau_{\mathcal{M}} |\ \exists \psi\ , (U, \psi) \in \mathbf{A}\} \tag{1}$$

debe aclararse que $\tau_{\mathcal{M}}$ es la topología de la variedad y $\mathbf{A}$ el Atlas fijado en ella. Así el conjunto Λ no es otra cosa que la colección de todos los dominios abiertos de los homeomorfismos en $\mathcal{M}$.

> ¿Porqué es llamativo este conjunto?.

En primer lugar gracias a los homeos existe una noción de “copiar” la topología de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{M}$. En segundo lugar el conjunto se compone de abiertos. Si bien la familia no necesariamente cierra ante uniones arbitrarias o intersecciones finitas, existe una posibilidad de que sea base de una topología en $\mathcal{M}$. Ademas, existen dos condiciones relevantes que nos interesan

1)
$$\bigcup \Lambda = \mathcal{M} \tag{2}$$

2) N2 es una clase Hereditaria
Pasemos a hacer unos cálculos que nos llaman la atención.

Partimos de la siguiente proposición, la cual resulta siempre verdadera

$$\forall U \in \Lambda, \exists \psi : U \subseteq \mathcal{M} \to V \subseteq \mathbb{R}^n | \psi(U) \in \tau_{\mathbb{R}^n}$$

debido a los homeos esto implica que

$$U = \psi^{-1}(V) \in \tau_{\mathcal{M}}$$

Construimos entonces a V como la unión numerable de una base de $\tau_{\mathbb{R}^n}$, sea esta $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_{\mathbb{R}^n}$. Luego esto permite escribir

$$U = \bigcup_i \psi^{-1}(\beta_i) = \bigcup_i \alpha_i \tag{3}$$

con $\alpha_i \in \tau_{\mathcal{M}}$. Este resultado permite pensar a un elemento de Λ construido a partir de uniones numerables de los abiertos α_i, lo cual es un indicio de que al menos cada dominio es unión numerable de ciertos abiertos.

Para cerrar con esta discusión deberíamos verificar si el conjunto Λ es base para tal topología y/o si se puede construir una base numerable para la topología $\tau(\Lambda)$ o $\tau_{\mathcal{M}}$ usando preimagenes de la base en $\mathbb{R}^n$, la cual sabemos que es numerable. Si ocurre tal cosa entonces podríamos concluir que la topología generada por el set es N2. Como N2 es hereditaria, y en $\mathcal{M}$ existe al menos una topología de clase N2, esta propiedad nos podría ayudar a concluir que la variedad es N2. Dando por finalizado los aparentes convenios en definir las variedades diferenciables de cierta forma, y demostrando que Hausdorff + Atlas + compatibilidad $\Gamma^r(\mathbb{R}^n)$ otorgan una estructura N2.