六、链条件

Cinqcents • 16 Mar 2025

目前为止, 我们都没有对所讨论的环作含幺交换以外的限制, 然而为了获得一些更深刻的结果, 我们必须对环施加一些有限性条件, 例如本节阐述的链条件.

链条件一般来说既适用于环, 也适用于模. 我们将首先阐述模的情况, 值得注意的是, 这里相当一部分证明都是形式上的, 可以从中观察到升链和降链间的对应. 但这种对应在环的情况下会消失, 我们会在之后的章节看到这一点.

令 Σ 为带偏序 $\leq$ 的集.

Proposition 1 以下命题是等价的:

i. 任意升链 $\{x_i\} \subseteq \Sigma$: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ 必将在某处终止, 即存在 n 使得 $x_n = x_{n+1} = \cdots$;
ii. Σ 的任意非空子集都有极大元.

若令 Σ 是 M 的子模的集合, 含入关系 $\subseteq$ 作为其上偏序, 则 i. 通常被称为升链条件, 简称a.c.c.; 而 ii. 通常被称为极大条件. 若 M 满足此两条等价条件其一, 则称为 **Noetherian** 的. 反之, 若包含关系 $\supseteq$ 为其上偏序, 则 i. 被称为降链条件(d.c.c.), ii. 被称为 极小条件. 此时满足 i. 或 ii. 的模 M 称为 **Artinian** 的.

Examples

1. 有限阿贝尔群作为 $\mathbb{Z}$-模满足a.c.c.和d.c.c.
2. $\mathbb{Z}$ 本身作为 $\mathbb{Z}$-模只满足a.c.c. , 这是因为对任意 $a \in \mathbb{Z}$ 有升链 $(a) \supsetneq (a^2) \supsetneq \cdots \supsetneq (a^n) \supsetneq \cdots$.
3. 取任一素数 p, 令 G 为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的那些阶为 p 的幂次的元素组成的子群, 则 G 对每个 n 有且仅有一个阶为 p^n 的子群 G_n, 且这些子群组成升链, 故 G 不满足a.c.c. . 但 G 满足 d.c.c. , 因为 G 只有 G_n 这些子群.
4. 所有形式为 m/p^n 的有理数组成一个子群 H, 它既不满足a.c.c.也不满足d.c.c. . 这是因为存在正合列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$, 于是 $\mathbb{Z}$ 不满足d.c.c.$\Rightarrow$ H 不满足d.c.c. , G 不满足a.c.c.$\Rightarrow$ H 不满足a.c.c.
5. 多项式环 $k[x]$ (k是域) 的理想集满足a.c.c.但不满足d.c.c. .

6. 无穷多个变元的多项式环$k[x_1, x_2, \ldots]$既不满足a.c.c.也不满足d.c.c. :可构造严格升链 $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots$ 及严格降链 $(x_1) \supset (x_1^2) \supset \cdots$.
7. 我们会在之后证明, 理想集满足d.c.c.的环一定也在理想上满足a.c.c. . 这对模来说一般不成立.

Proposition 2 M 是一个Noetherian A-模 $\iff$ M 的任意子模都是有限生成的.

Prop.2 使得 Noetherian 模要比 Artinian 模重要一些: 模的 Noetherian 性恰好是许多重要定理的前件, 使其带有一些重要性质. 但一些基本的形式性质能够同时在 Artinian 和 Noetherian 模上成立.

Proposition 3 若有A-模的正合列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

则

i. M Noetherian $\iff$ M' 和 M'' 均 Noetherian;
ii. M Artinian $\iff$ M' 和 M'' 均 Artinian.

Corollary 4 若 $M_i (1 \leq i \leq n)$ 均为 Noetherian A-模, 则 $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ 作为 A-模也 Noetherian.

环 A 称 Noetherian(resp. Artinian) 当它是一个 Noetherian(resp. Artinian) A-模, 即于理想上满足a.c.c. (resp. d.c.c.).

Examples

1. 任何域既 Artinian 又 Noetherian, 环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 亦如此. 但 $\mathbb{Z}$ 仅为 Noetherian.
2. PID 都 Noetherian.
3. 环 $k[x_1, x_2, \ldots]$ 并不 Noetherian, 但它是一个整环, 故可以构造它的分式域. 于是我们注意到 Noetherian 环的子环不一定 Noetherian.
4. 令 X 为紧无限 Hausdorff 空间, $C(X)$ 为其上的实值连续函数环. 任取一 X 中的严格递降闭集链 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, 再令 $\mathfrak{a}_n = \{f \in C(X) : f(F_n) = 0\}$, 则 $\{\mathfrak{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 组成 $C(X)$ 中理想的严格降链, 于是 $C(X)$ 不是 Noetherian.