Algèbre linéaire : Parlons de matrice d’expression, au lieu de matrice de passage

Johan Buret • 28 Apr 2025

Motivation

Le but de cet article est d’introduire des notations et une nomenclature plus explicites, notamment pour la manipulations des matrices de passage d’une base à une autre dans un espace vectoriel.

Un piège avec la formule usuelle $M' = P^{-1}MP$ est qu’elle n’encode pas assez de contexte. Par exemple, P est-elle la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, ou l’inverse?

Le cœur du problème est la notion de matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Vu le nom, on s’attendrait à ce que la matrice convertisse une colonne exprimée dans $\mathcal{B}$ en une colonne exprimée dans $\mathcal{B}'$ sous la forme suivante :

$$\cancel{X' = PX}$$

Alors que la formule correcte, avec la définition usuelle de la matrice de passage est l’inverse.

$$X = PX'$$

Notations

Soient

- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
- v un vecteur de E
- f un endomorphisme linéaire de E
- $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ trois bases de E

On note:

- $\left(\frac{v}{\mathcal{B}_0}\right)$ la matrice colonne $n \times 1$ des coordonnées de v dans $\mathcal{B}_0$
- $\left(\frac{f}{\mathcal{B}_0}\right)$ la matrice carrée $n \times n$ représentative de f dans $\mathcal{B}_0$
- $\left(\frac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{B}_0}\right)$ la matrice carrée $n \times n$ d’**expression** de la base $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_0$

Reformulation

Avec les notations ci-dessus, les formules classiques deviennent:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{v}{\mathcal{B}_1}\right) &= \left(\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{B}_1}\right)\left(\frac{v}{\mathcal{B}_0}\right) \qquad (1)\\
\left(\frac{f(v)}{\mathcal{B}_0}\right) &= \left(\frac{f}{\mathcal{B}_0}\right)\left(\frac{v}{\mathcal{B}_0}\right) \qquad (2)\\
\left(\frac{f}{\mathcal{B}_1}\right) &= \left(\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{B}_1}\right)\left(\frac{f}{\mathcal{B}_0}\right)\left(\frac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{B}_0}\right) \qquad (3)\\
\left(\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{B}_2}\right) &= \left(\frac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{B}_2}\right)\left(\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{B}_1}\right) \qquad (4)
\end{aligned}$$

La formule (3) est le pendant explicite de $M' = P^{-1}MP$

Avantages

Ces reformulations ont deux mérites majeurs.

- Le premier est de garder explicitement le lien entre une matrice et l'objet qu'elle repésente. Il est facile de perdre de vue ce lien en faisant du calcul matriciel pur; ces notations le restorent.
- La formule de changement de base est bien plus facile à retenir sous cette forme car elle repose sur une gymnastique similaire à la manipulations des fractions et des rationnels, et se prêtent à des simplifications proches, en tenant compte de la non commutativité du produit matriciel.