

Completando cuadrados para resolver cuadráticas

omem • 15 Oct 2024

Completando Cuadrados

Completar el cuadrado es una técnica algebraica que todos los estudiantes preuniversitarios deberían conocer. Tiene aplicaciones directas en la resolución de ecuaciones cuadráticas y también en la geometría analítica.

El objetivo de la técnica es transformar una ecuación cuadrática para escribirla en la forma $(x + \alpha)^2 + \beta$. Donde α y β son números reales y x es la variable algebraica. Aunque esta transformación pueda parecer abstracta, su utilidad de quedará clara después de unos ejemplos.

Primer ejemplo

Supongamos que queremos resolver la ecuación:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

El primer paso es restar 5 de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 6x = -5$$

Ahora en el lado izquierdo, vamos a completar el cuadrado. Para esto, tomamos el coeficiente del término lineal (6), lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

Sumamos este valor de ambos lados de la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$

En este punto, observamos que la parte izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que podemos factorizar como:

$$(x + 3)^2 = 4$$

Esta es la forma a la que queríamos llegar, la que se mencionaba al inicio del post, ya que para encontrar el valor de x , a partir de este punto, es sencillo: tomamos la raíz de ambos lados y despejamos los dos valores de x

$$x + 3 = \pm 2$$

De aquí tenemos dos soluciones:

$$x = -3 + 2 = -1$$

$$x = -3 - 2 = -5$$

Segundo ejemplo

Veamos ahora otro ejemplo, pero con un coeficiente cuadrático distinto de 1:

$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

El procedimiento será casi el mismo, pero en este caso, primero debemos dividir ambos lados de la ecuación por el coeficiente del término cuadrático (2):

$$\frac{2x^2 + 8x + 6}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Procedemos como en el primer ejemplo:

$$x^2 + 4x = -3$$

Ahora completamos el cuadrado tomando el coeficiente del término lineal (4), lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

Sumamos esta valor de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$(x + 2)^2 = 1$$

$$x + 2 = \pm 1$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x = 1 - 2 = -1$$

$$x = -1 - 2 = -3$$

Aunque suene repetitivo, es importante destacar que en los ejemplos anteriores partimos de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y, al completar el cuadrado, la transformamos en una de la forma $(x + \alpha)^2 = \beta$. Una vez aquí ya era fácil encontrar el valor de x .

Describiendo el algoritmo

Con lo que hemos visto, podemos generalizar un algoritmo que permita resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado:

1. En caso de ser necesario, realiza una división o multiplicación para que el coeficiente del término cuadrático sea 1.
2. Aisla el término constante en el lado derecho de la igualdad
3. Completa el cuadrado: toma el coeficiente del término lineal, divídelo entre 2 y elévalo al cuadrado. Suma este valor a ambos lados de la ecuación.
4. La parte izquierda siempre será un trinomio cuadrado perfecto, factorízalo.
5. Despeja x tomando raíz cuadrada de ambos lados y resolviendo las dos soluciones.

Una reflexión y un pequeño bonus

Es probable que en este punto te estés preguntando: ¿De verdad necesitamos tanto esfuerzo para resolver una ecuación cuadrática? La respuesta, siendo sinceros, es no. Podríamos usar la fórmula general o recurrir a la factorización que aprendimos en la secundaria, y saltarnos todo este proceso.

Sin embargo, este post está dirigido a estudiantes que están a punto de dar un paso importante en su formación matemática. Así que añadir a tu caja de herramientas diversas técnicas, como la que acabamos de estudiar, es importante. Más aún, completar el cuadrado es la base para deducir la famosa fórmula general. Vamos a ver cómo se descubrió esta fórmula hace ya muchos años.

Partimos de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Recuerda que en este caso a , b y c son números. Primero dividimos todo entre a , para que el coeficiente del término cuadrático sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Aislamos el término independiente del lado derecho de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Tomamos el coeficiente del término lineal $\left(\frac{b}{a}\right)$, lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Sumamos este valor de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Como en todos los ejemplos anteriores la parte de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, lo podemos factorizar:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Despejamos obteniendo la raíz cuadrada de ambos lados:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Haciendo el álgebra dentro de la raíz y despejando x tenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Distribuyendo la raíz entre el numerador y el denominador:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Poniendo todo en el mismo denominador hemos terminado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mil gracias por leer. Nos vemos en otro post!!!!