Completando cuadrados para resolver cuadráticas

written by omem on Functor Network
original link: https://functor.network/user/1034/entry/543

Completando Cuadrados

Completar el cuadrado es una técnica algebraica que todos los estudiantes preuniversitarios deberían conocer. Tiene aplicaciones directas en la resolución de ecuaciones cuadráticas y también en la geometría analítica.

El objetivo de la técnica es transformar una ecuación cuadrática para escribirla en la forma $(x + \alpha)^2 + \beta$. Donde α y β son números reales y x es la variable algebraica. Aunque esta transformación pueda parecer abstracta, su utilidad de quedará clara después de unos ejemplos.

Primer ejemplo

Supongamos que queremos resolver la ecuación:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

El primer paso es restar 5 de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 6x = -5$$

Ahora en el lado izquierdo, vamos a completar el cuadrado. Para esto, tomamos el coeficientedel término lineal (6), lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

Sumamos este valor de ambos lados de la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$

En este punto, observamos que la parte izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que podemos factorizar como:

$$(x + 3)^2 = 4$$

Esta es la forma a la que queríamos llegar, la que se mencionaba al inicio del post, ya que para encontrar el valor de x, a partir de este punto, es sencillo: tomamos la raíz de ambos lados y despejamos los dos valores de x

$$x + 3 = \pm 2$$

De aquí tenemos dos soluciones:

$$x = -3 + 2 = -1$$

$$x = -3 - 2 = -5$$

Segundo ejemplo

Veamos ahora otro ejemplo, pero con un coeficiente cuadrático distinto de 1:

$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

El procedimiento será casi el mismo, pero en este caso, primero debemos dividir ambos lados de la ecuación por el coeficiente del término cuadrático (2):

$$\frac{2x^2 + 8x + 6}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Procedemos como en el primer ejemplo:

$$x^2 + 4x = -3$$

Ahora completamos el cuadrado tomando el coeficiente del término lineal (4), lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

Sumamos esta valor de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$(x + 2)^2 = 1$$

$$x + 2 = \pm 1$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x = 1 - 2 = -1$$

$$x = -1 - 2 = -3$$

Aunque suene repetitivo, es importante destacar que en los ejemplos anteriores partimos de una ecuación de la forma $ax^2+bx+c = 0$ y, al completar el cuadrado, la transformamos en una de la forma $(x + \alpha)^2 = \beta$ Una vez aquí ya era fácil encontrar el valor de x.

Describiendo el algoritmo

Con lo que hemos visto, podemos generalizar un algoritmo que permita resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado:

1) En caso de ser necesario, realiza una división o multpliación para que el coeficiente del término cuadrático sea 1.

2) Aisla el término constante en el lado derecho de la igualdad

3) Completa el cuadrado: toma el coeficiente del término lineal, divídelo entre 2 y elévalo al cuadrado.Suma este valor a ambos lados de la ecuación.

4) La parte izquierda siempre será un trinomio cudarado perfecto, factorízalo.

5) Despeja x tomando raíz cuadrada de ambos lados y resolviendo las dos soluciones.

Una reflexión y un pequeño bonus

Es probable que en este punto te estés preguntando: ¿De verdad necesitamos tanto esfuerzo para resolver una ecuación cuadrática? La respuesta, siendo sinceros, es no. Podríamos usar la fórmula general o recurrir a la factorización que aprendimos en la secundaria, y saltarnos todo este proceso.

Sin embargo, este post está dirigido a estudiantes que están a punto de dar un paso importante en su formación matemática. Así que añadir a tu caja de herramientas diversas técnicas, como la que acabamos de estudiar, es importante. Más aún, completar el cuadrado es la base para deducir la famosa fórmula general. Vamos a ver cómo se descubrió está fórmula hace ya muchos años.

Partimos de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Recuerda que en este caso a, b y c son números. Primero dividimos todo entre a, para que el coeficiente del término cuadrático sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Aislamos el término independiente del lado derecho de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Tomamos el coeficiente del término lineal $\left(\frac{b}{a}\right)$, lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Sumamos este valor de ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Como en todos los ejemplos anteriores la parte de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, lo podemos factorizar:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Despejamos obteniendo la raíz cuadrada de ambos lados:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Haciendo el álgebra dentro de la raíz y despejando x tenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Distribuyendo la raíz entre el numerador y el denominador:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Poniendo todo en el mismo denominador hemos terminado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mil gracias por leer. Nos vemos en otro post!!!!